COMPLEXES – FEUILLES D'EXERCICES

Un des exercices corrigés sur la chaîne **MATHS EN TÊTE** (voir QR Code) est susceptible de tomber en évaluation. **WWW.MATHSENTETE.FR**

➲ Retour sur les notions de 1i2D

Exercice 1 :

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 2-3i$ et $z_2 = -4-i$.

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$z_2 - 2z_1 \qquad z_1 \times z_2 \qquad {z_2}^2 \qquad \frac{1}{z_1} \qquad \frac{z_1}{z_2} \qquad \frac{1+z_1}{1-z_2}$$

Exercice 2 :

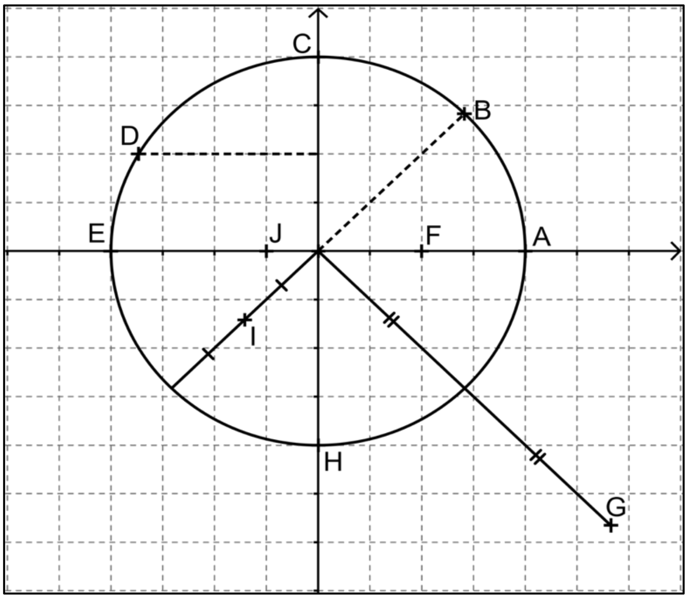
Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$$z_1 = 1-i \qquad z_2 = 2+2i \qquad z_3 = -1+i\sqrt{3} \qquad z_4 = 2i \qquad z_5 = -3$$

Exercice 3 :

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants dont on donne le module r et un argument θ :

1) $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$
3) $r = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{6}$
5) $r = 1$ et $\theta = \frac{7\pi}{3}$
2) $r = \sqrt{3}$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$
4) $r = 4$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$
6) $r = \frac{1}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$



Exercice 4 :

Dans le plan complexe ci-contre, on a tracé le cercle trigonométrique et placé des points. Donner l'écriture exponentielle de l'affixe de chacun de ces points.

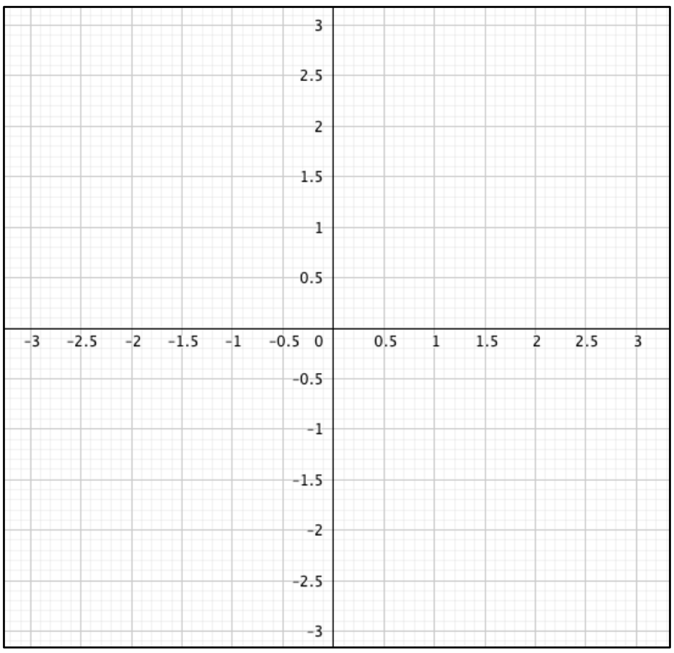
➲ Forme exponentielle

Exercice 5 :

Pour chacun des nombres complexes ci-dessous, placer, avec précision, son image dans le plan complexe :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} \qquad z_3 = e^{-i\pi}$$

$$z_3 = e^{2i\pi} \qquad z_6 = 2e^{\frac{5i\pi}{6}} \qquad z_5 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_7 = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2}$$



Exercice 6 :

Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$z_1 = 2i \qquad z_2 = -3i \qquad z_3 = -2 \qquad z_4 = 1 - i \qquad z_5 = \sqrt{3} + i \qquad z_6 = 1 - i\sqrt{3} \qquad z_7 = \sqrt{3} + 3i \qquad z_8 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

Exercice A : « Différentes formes »

1) Mettre le nombre complexes $z_1 = \frac{2}{1+i}$ sous forme algébrique.

2) a) Mettre le nombre complexe $z_2 = 1 + i$ sous forme trigonométrique.

b) En déduire sa forme exponentielle.

3) a) Mettre le nombre complexe $z_3 = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$ sous forme algébrique.

b) Représenter ce nombre dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 7 :

Donner le module et un argument des nombres complexes suivants puis déterminer leur forme algébrique :

$z_1 = e^{i\pi} \qquad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} \qquad z_3 = 25e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_4 = e^{-\frac{3i\pi}{2}} \qquad z_5 = \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}} \qquad z_6 = \dfrac{1}{3}e^{-\frac{i\pi}{2}} \qquad z_7 = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} \qquad z_8 = \dfrac{e^{-\frac{5i\pi}{6}}}{2}$

Exercice 8 :

Effectuer les calculs ci-dessous :

$$A = 5e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad C = \frac{8e^{\frac{4i\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} \qquad E = \frac{8e^{i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} \qquad G = \frac{\left(2e^{-\frac{i\pi}{2}}\right)^2}{(2e^{i\pi})^2}$$

$$B = \overline{2e^{i\frac{\pi}{2}}} \times 2e^{i\pi} \qquad D = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\pi}} \qquad F = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\overline{2e^{-i\pi}} \times 5e^{i\frac{\pi}{2}}} \qquad H = 3e^{i\frac{\pi}{4}} + 5e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Exercice 9 :

On considère le nombre complexe : $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Donner la forme exponentielle puis la forme algébrique de chacun des nombres complexes : $z, z^2, z^3, \ldots, z^6$.

Exercice 10 : « a, b, c et Z »

On considère les nombres complexes suivants :

$a = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} \qquad b = -2 - 2i\sqrt{3} \qquad c = 2\sqrt{3} - 2i$

On appelle A, B et C leurs images respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

1) a) Calculer les modules de a, b et c.

b) En déduire que les points A, B et C sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2) Donner un argument de chacun des nombres a, b et c.

3) Déterminer la forme exponentielle, puis la forme algébrique, du nombre complexe : $Z = \frac{a^3 \times b^3}{c^6}$

4) Montrer que $Z^4 = -1$.

5) On appelle N le point image du nombre Z.

Représenter A, B, C, N dans le repère donné.

➲ Exercices type bac

Exercice 11 :

Toutes les réponses de l'exercice devront être justifiées.

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad z_2 = \overline{z_1}$ $\quad z_3 = -z_1$ $\quad z_4 = z_1 e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

2) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 et z_3.

3) a) Démontrer que $z_4 = 3e^{\frac{5i\pi}{6}}$.
   b) En déduire le module et un argument du nombre complexe z_4.
   c) Quelle est la forme algébrique du nombre complexe z_4 ?

4) On munit le plan complexe d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
   a) Démontrer que les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4 sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon puis construire ce cercle dans le repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
   b) Placer, avec précision, les points A, B, C et D dans le repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
   c) Calculer les distances AC et BD.
   d) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 12 :

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad z_2 = 4$ $\quad z_3 = 2\left(1 + e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)$

On appelle M_1, M_2 et M_3 leurs images respectives dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

1) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z_1.

2) Placer les points M_1, M_2 et M_3 dans le plan $\mathscr{P}$.

3) a) Calculer, sous forme trigonométrique les nombres complexes : $z_1 - 2$, $z_2 - 2$ et $z_3 - 2$.
   b) En déduire que les points M_1, M_2 et M_3 sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Démontrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle.

Exercice B : « Géométrie complexe »

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 - i \qquad z_B = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_C = 7 - i$$

1) a) Ecrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.

b) Placer les points A, B et C dans le plan $\mathscr{P}$.

2) Déterminer les longueurs AB, AC, BC et en déduire la nature du triangle ABC.

3) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère le point I d'affixe $z_I = 3 - i$

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z-(3-i)| = 4$.

a) Les points A, B, C et D appartiennent-ils à l'ensemble $\mathscr{E}$?

b) Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$?

c) Représenter l'ensemble $\mathscr{E}$ dans le plan $\mathscr{P}$ défini ci-dessus.

Exercice 13 :

On munit le plan complexe $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ d'unité graphique 10 cm.

On considère le point M_0 d'affixe $z_0 = 1$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note M_n le point d'affixe : $z_n = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_{n-1}$.

1) a) Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

b) Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3 dans le plan $\mathscr{P}$ défini ci-dessus.

2) Pour tout entier naturel n, on note r_n le module du nombre complexe z_n.

a) Démontrer que la suite (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Quelle est la limite de la suite (r_n) ?

c) On considère que sur la représentation, on ne peut plus distinguer un point M_n du point O si la distance OM_n est strictement inférieure à 1 mm. À l'aide de la calculatrice, indiquer la plus grande valeur notée N de n pour laquelle M_n peut être distinguée de O.

3) On admet que $z_6 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6$.

Donner l'écriture exponentielle de z_6 puis construire soigneusement M_6 sur la représentation.