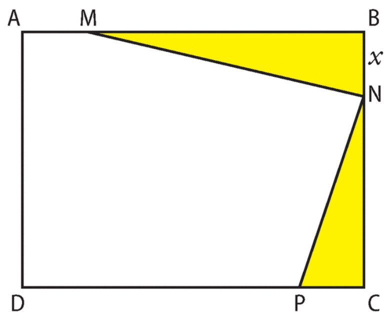
CORRECTION DE L'EXERCICE 28

Exercice 28 :

ABCD est un rectangle tel que AB = 10 cm et BC = 8 cm.
N est un point mobile sur le segment [BC]. On note x la longueur en centimètres de [BN].
M et P sont les points respectifs de [AB] et [CD] tels que AM = BN = CP = x.



Le but de cet exercice est de déterminer où placer N sur le segment [BC] pour que l'aire de la surface jaune, la somme des aires des triangles BMN et CNP, soit maximale.

1. Justifier que $x \in [0\,;8]$.

2. Exprimer BM en fonction de x.

3. Exprimer CN en fonction de x.

4. Montrer que l'aire du triangle BMN est égale à $\dfrac{10x - x^2}{2}$.

5. On note f la fonction qui à la longueur x associe l'aire totale de la surface jaune.
Vérifier que l'on a $f(x) = 9x - x^2$.

6. a) Montrer que $f(x) = -(x - 4{,}5)^2 + 20{,}25$.
b) En déduire la solution au problème posé.

Corrigé :

1. Comme $AM = BN = x$, x est limité par la plus petite dimension, c'est-à-dire $BN = 8$.
   Donc $0 \leq x \leq 8$. Autrement dit : $\boldsymbol{x \in [0; 8]}$
2. $\boldsymbol{BM = 10 - x}$
3. $\boldsymbol{CN = 8 - x}$
4. $\boldsymbol{A_{BMN}} = \frac{BM \times BN}{2} = \frac{(10-x)\times x}{2} = \boldsymbol{\frac{10x-x^2}{2}}$
5. Pour tout $x \in [0; 8]$: $f(x) = A_{BMN} + A_{PCN}$
   Or $A_{PCN} = \frac{PC \times CN}{2} = \frac{x\times(8-x)}{2} = \frac{8x-x^2}{2}$
   Donc $\boldsymbol{f(x)} = \frac{10x-x^2}{2} + \frac{8x-x^2}{2} = \frac{18x-2x^2}{2} = \boldsymbol{9x - x^2}$
6. a) Pour tout $x \in [0; 8]$: $\boldsymbol{-(x - 4,5)^2 + 20,25} = -(x^2 - 2 \times 4{,}5 \times x + 4{,}5^2) + 20{,}25$
   $= -(x^2 - 9x + 20{,}25) + 20{,}25$
   $= -x^2 + 9x - 20{,}25 + 20{,}25 = -x^2 + 9x = \boldsymbol{f(x)}$

   b) Pour tout $x \in [0; 8]$:
   $(x - 4{,}5)^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif.
   Donc $-(x - 4{,}5)^2 \leq 0$
   D'où $-(x - 4{,}5)^2 + 20{,}25 \leq 20{,}25$
   Ce qui signifie que $f(x) \leq 20{,}25$
   De plus : $f(4{,}5) = -(4{,}5 - 4{,}5)^2 + 20{,}25 = 0 + 20{,}25 = 20{,}25$
   Donc $\boldsymbol{20,25}$ est le maximum (et il est atteint en $\boldsymbol{x = 4,5}$)