

CORRECTION DES EX. – INTEGRALES

Exercice 1 : calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 2x + 1) dx$$

$$B = \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$C = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos 2x dx$$

$$D = \int_{-1}^2 \frac{2}{2x+3} dx$$

$$E = \int_0^1 e^{5x} dx$$

Corrigé :

$$A = \int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 2x + 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1^4}{4} + 1^3 - 1^2 + 1 - \left(\frac{0^4}{4} + 0^3 - 0^2 + 0 \right) \\ = \frac{1}{4} + 1 - 1 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$B = \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[5 \ln x + \frac{1}{x} \right]_1^2 = 5 \ln 2 + \frac{1}{2} - \left(5 \ln 1 + \frac{1}{1} \right) = 5 \ln 2 + \frac{1}{2} - 0 - 1 = 5 \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$C = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{1}{2} \sin 2\pi - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

$$D = \int_{-1}^2 \frac{2}{2x+3} dx = [\ln(2x+3)]_{-1}^2 = \ln(2 \times 2 + 3) - \ln(2 \times (-1) + 3) = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7$$

$$E = \int_0^1 e^{5x} dx = \left[\frac{1}{5} e^{5x} \right]_0^1 = \frac{1}{5} e^5 - \frac{1}{5} e^0 = \frac{1}{5} e^5 - \frac{1}{5}$$

Exercice 2 : soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2}$

a) Montrer que, pour tout nombre réel $x \in]2; +\infty[$:

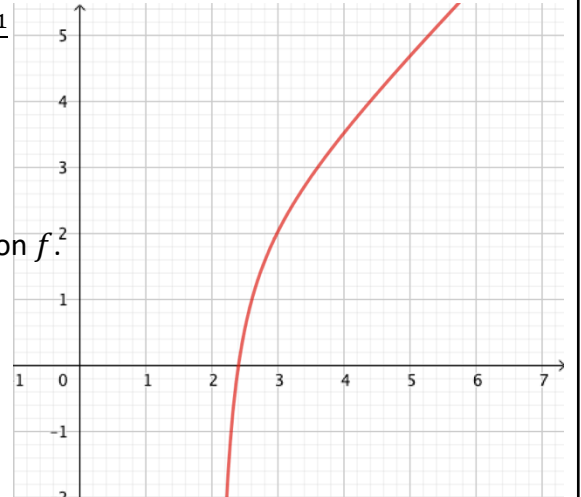
$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2} = x - \frac{1}{x - 2}$$

b) En déduire $A = \int_3^4 f(x) dx$

Sur le repère ci-contre où a été représentée la courbe de cette fonction f .

c) Que représente le nombre A ? *On détaillera la réponse.*

d) Hachurer l'aire correspondant sur la courbe.

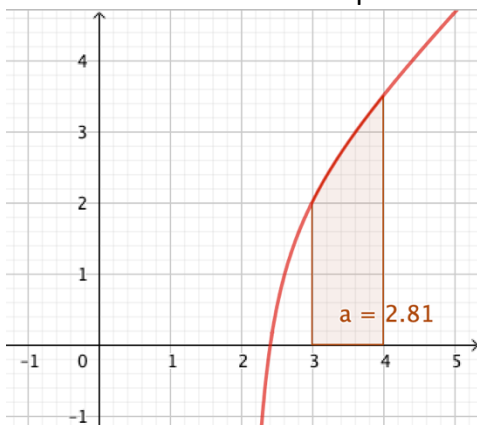


Corrigé :

$$a) x - \frac{1}{x-2} = \frac{x \times (x-2)}{1 \times (x-2)} - \frac{1}{x-2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x-2} = f(x)$$

$$b) A = \int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x-2} \right) dx = \int_3^4 \left(x - \frac{1}{x-2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln(x-2) \right]_3^4 = \frac{4^2}{2} - \ln 2 - \left(\frac{3^2}{2} - \ln 1 \right) \\ = 8 - \ln 2 - 4,5 + 0 = 3,5 - \ln 2 \approx 2,81$$

c) Le nombre A représente l'aire en unités d'aire délimitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$.



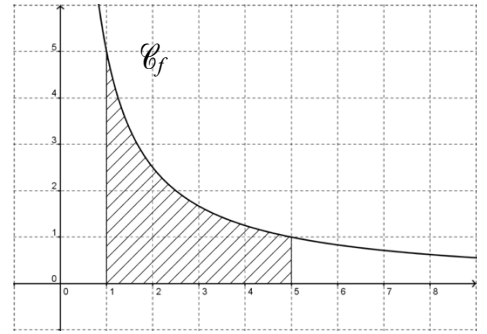
d)

Exercice 3 :

La courbe ci-contre est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, d'une fonction f .

1) Comment calcule-t-on l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie hachurée ?

2) La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5}{x}$. Calculer cette aire.

**Corrigé :**

1) Cette aire est égale à $\int_1^5 f(x) dx$.

$$2) \int_1^5 f(x) dx = \int_1^5 \frac{5}{x} dx = [5 \ln x]_1^5 = 5 \ln 5 - 5 \ln 1 = 5 \ln 5$$

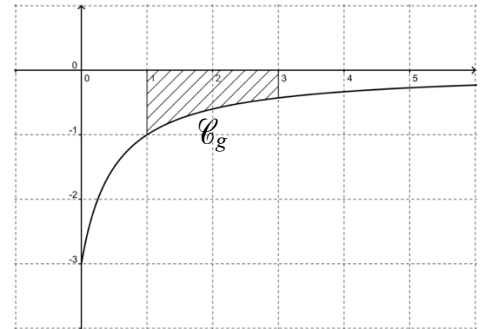
Exercice 4 :

La courbe ci-contre est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, d'une fonction g .

1) Comment calcule-t-on l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie hachurée ?

2) La fonction g est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{-3}{1+2x}$.

Calculer cette aire.

**Corrigé :**

1) Cette aire est égale à $-\int_1^3 g(x) dx$ (fonction négative !)

$$2) -\int_1^3 g(x) dx = -(-3) \int_1^3 \frac{1}{1+2x} dx = \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{2}{1+2x} dx = \frac{3}{2} [\ln(1+2x)]_1^3 \\ = \frac{3}{2} \ln 7 - \frac{3}{2} \ln 3 = \frac{3}{2} \ln \frac{7}{3}$$

Exercice 5 :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées.

On considère la fonction f définie, pour tout nombre réel x strictement positif

$$\text{par : } f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x}$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction F définie, pour tout nombre réel x strictement positif

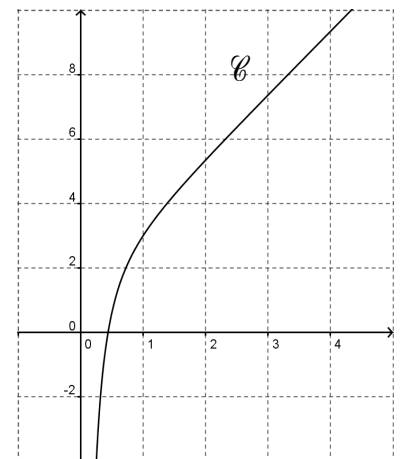
$$\text{par : } F(x) = x^2 + x + \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

1) Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2) On note \mathcal{P} la surface plane délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

a) On note \mathcal{A} l'aire de la surface \mathcal{P} exprimée en unités d'aire. Hachurer \mathcal{P} et calculer la valeur exacte de \mathcal{A} .

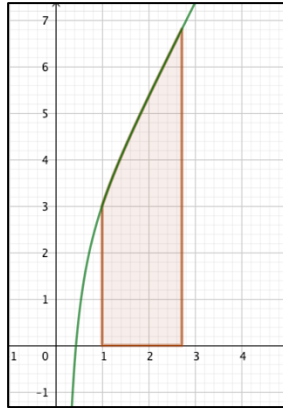
b) Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de la surface \mathcal{P} exprimée en cm^2 .



Corrigé :

1) Dérivons F , qui est une somme. Attention tout de même au dernier terme, qui nous amène à utiliser la dérivée de $(\ln u)^2$ qui vaut $2 \ln u \times u'$.

$$F'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2} \times 2(\ln x) \times \frac{1}{x} = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x} = f(x) \text{ donc } F \text{ est bien une primitive de } f.$$



2) a)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e f(x) dx = [F(x)]_1^e = F(e) - F(1) = \left(e^2 + e + \frac{1}{2}(\ln e)^2 \right) - \left(1^2 + 1 + \frac{1}{2}(\ln 1)^2 \right) \\ &= e^2 + e + \frac{1}{2} - 1 - 1 - 0 = e^2 + e + \frac{1}{2} - 2 = e^2 + e - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

b) 1 unité d'aire vaut 2cm^2 car $2 \times 1 = 2$.

$$\text{Donc } \mathcal{J} = 2 \times \left(e^2 + e - \frac{3}{2} \right) \approx 17,21 \text{ cm}^2.$$

Exercice 6 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2cm.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (x+1) \ln x$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

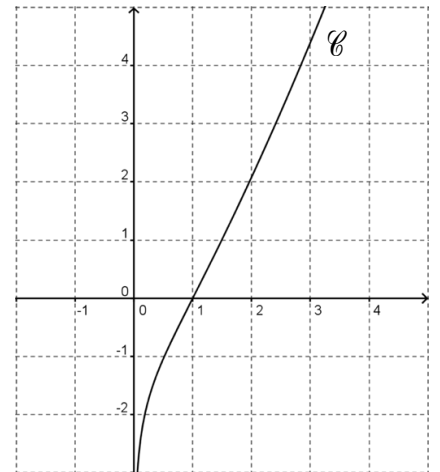
$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) (\ln x - 1) + \frac{x^2}{4}$$

1) Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

2) Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe \mathcal{C} .

a) Hachurer la partie du plan \mathcal{E} délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

b) Déterminer la valeur exacte de l'aire de la partie \mathcal{E} en cm^2 .



Corrigé :

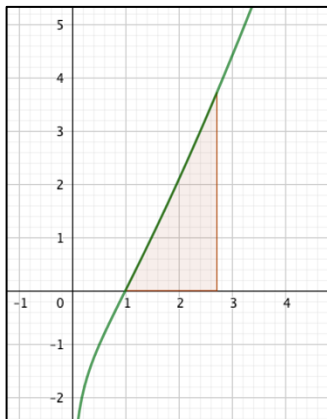
$$1) F \text{ est de la forme } u \times v + w \text{ donc } F' = u'v + uv' + w' \text{ avec } \begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} + x \\ v(x) = \ln x - 1 \\ w(x) = \frac{x^2}{4} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} u'(x) = x + 1 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \\ w'(x) = \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } F'(x) = (x + 1)(\ln x - 1) + \frac{1}{x} \times \left(\frac{x^2}{2} + x \right) + \frac{x}{2}$$

$$= (x+1)(\ln x - 1) + \left(\frac{x}{2} + 1\right) + \frac{x}{2} = (x+1)(\ln x - 1) + \frac{2x}{2} + 1$$

$$= (x+1)(\ln x - 1) + x + 1$$

Factorisons par $x+1$: $F'(x) = (x+1)(\ln x - 1) + x + 1 = (x+1)(\ln x - 1) + (x+1) \times 1$
 $= (x+1) \times (\ln x - 1 + 1) = (x+1) \ln x = f(x).$



2) a)

$$b) \mathcal{O} = \int_1^e f(x) dx = [F(x)]_1^e = F(e) - F(1) = \left(\left(\frac{e^2}{2} + e \right) (\ln e - 1) + \frac{e^2}{4} \right) - \left(\left(\frac{1^2}{2} + 1 \right) (\ln 1 - 1) + \frac{1^2}{4} \right)$$

$$= \left(\left(\frac{e^2}{2} + e \right) \times 0 + \frac{e^2}{4} \right) - \left(\frac{3}{2} \times (-1) + \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4} = \frac{e^2+5}{4} \text{ unités d'aire.}$$

Or 1 unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$.

$$\text{Donc } \mathcal{O} = 4 \times \left(\frac{e^2+5}{4} \right) = e^2 + 5 \text{ cm}^2.$$

Exercice 7 :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

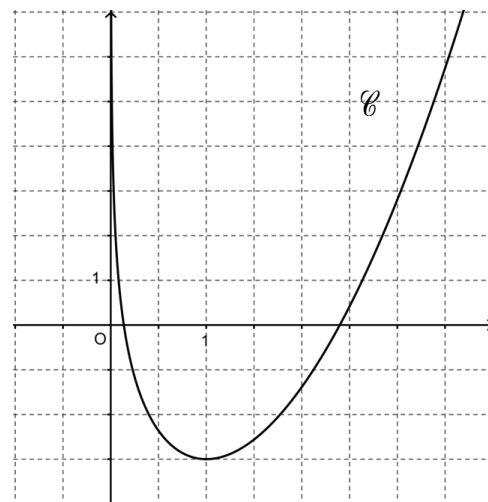
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 4 - 2 \ln x$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$H(x) = x \ln x - x$$



- Déterminer $H'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.
- En déduire une primitive F de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- On appelle Δ la partie du plan délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$

Hachurer Δ et calculer la valeur exacte de l'aire de Δ en unités d'aire, puis en cm^2 .

Corrigé :

- H est de la forme $u \times v - w$ donc H' sera de la forme $u'v + uv' - w'$ avec :

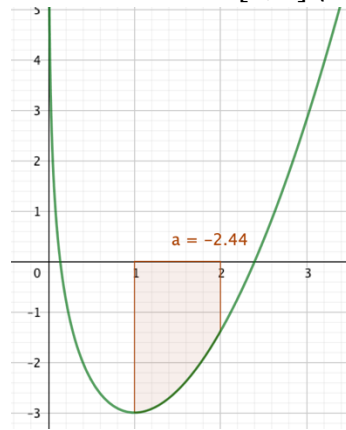
$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln x \\ w(x) = x \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \\ w'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } H'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

Donc $H(x)$ est une primitive de $\ln x$.

2. Donc $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x - 2(x \ln x - x) = \frac{x^3}{3} - 4x - 2x \ln x + 2x = \frac{x^3}{3} - 2x - 2x \ln x$

3. On constate que la fonction est **négative** sur l'intervalle $[1; 2]$ (d'où le signe **-** devant l'intégrale) :



$$\begin{aligned} \text{L'aire de } \Delta \text{ vaut } - \int_1^2 f(x) dx &= -[F(x)]_1^2 = - \left[\frac{x^3}{3} - 2x - 2x \ln x \right]_1^2 \\ &= - \left(\frac{8}{3} - 4 - 4 \ln 2 \right) + \left(\frac{1}{3} - 2 - 2 \ln 1 \right) = -\frac{8}{3} + 4 + 4 \ln 2 + \frac{1}{3} - 2 \\ &= -\frac{7}{3} + 2 + 4 \ln 2 = -\frac{1}{3} + 4 \ln 2 \text{ unités d'aire} \end{aligned}$$

(soit $\approx 2,44$ unités d'aire – voire dessin)

Or 1 unité d'aire vaut $2 \times 1 = 2 \text{ cm}^2$ donc l'aire de Δ vaut $2 \times \left(-\frac{1}{3} + 4 \ln 2 \right) = -\frac{2}{3} + 8 \ln 2 \text{ cm}^2$

(soit $\approx 4,88 \text{ cm}^2$)