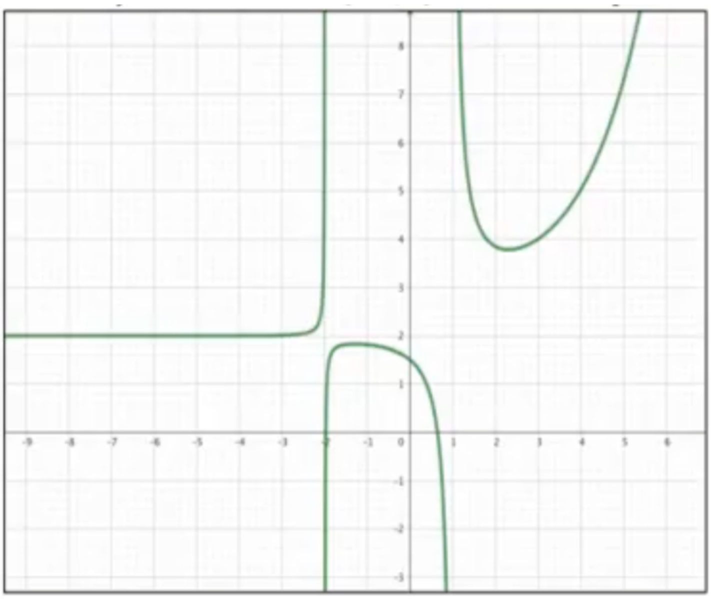
Feuille d'exercices : Limites de fonctions

CONJECTURES SUR LES LIMITES

B

Exercice 1 : Détermination graphique de limites

On considère une fonction f définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$ et sa courbe représentative ci-dessous.



Ti2D / Limites
Détermination graphique de limites

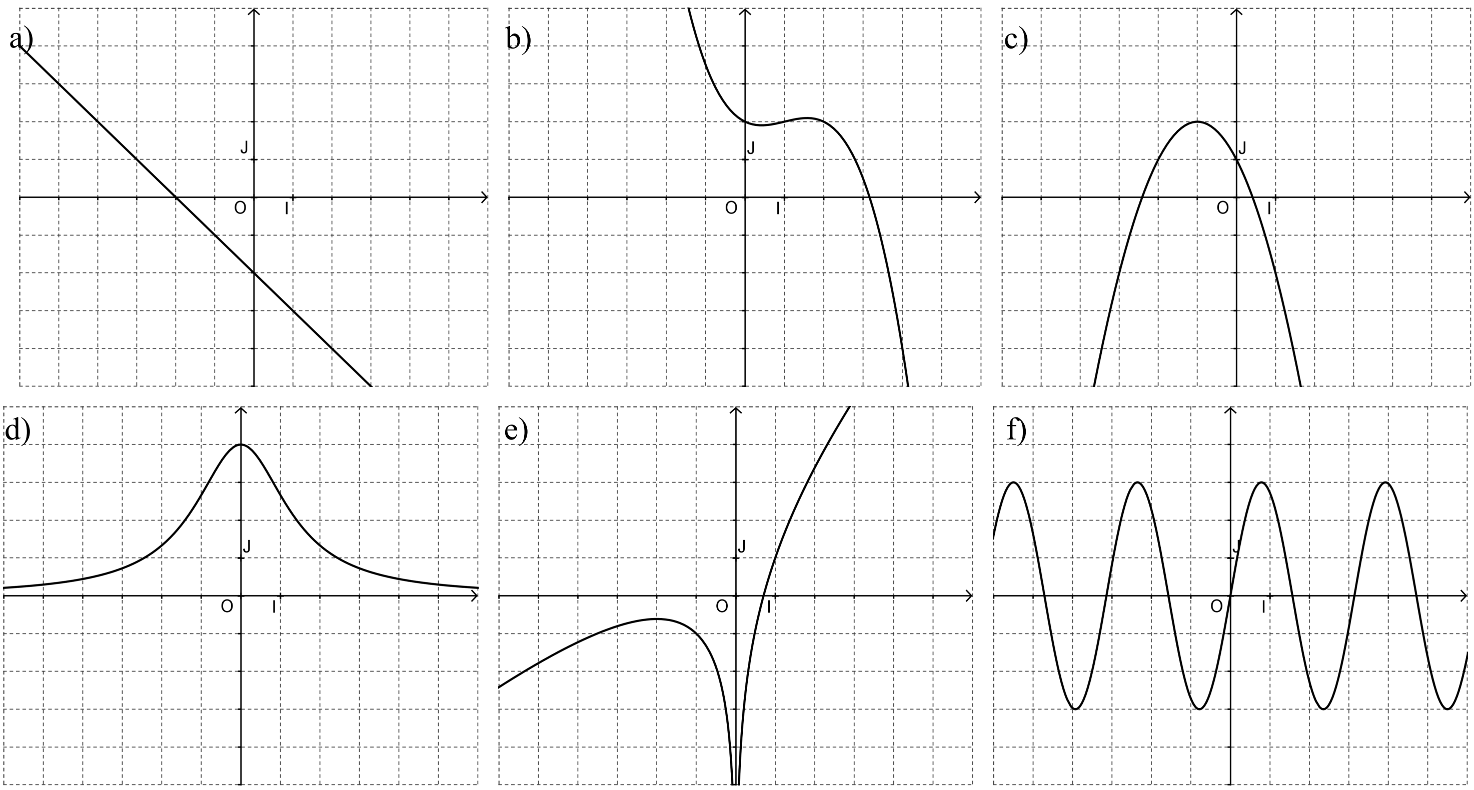
Déterminer graphiquement les limites aux bornes de son ensemble de définition (en $-\infty$, en $+\infty$, en -2 et en 1 à gauche et à droite.)

B

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, on donne la représentation graphique d'une fonction *f*.

Lorsque cela est possible, déterminer graphiquement la limite en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0 de la fonction *f*.



B

Exercice 3 :

À l'aide d'une calculatrice, déterminer graphiquement les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

1) $f(x)=3x+2$ 2) $g(x)=x-x^3$ 3) $h(x)=-x^2+3x+1$ 4) $k(x)=2+\dfrac{1}{x^2+1}$

Exercice 4 : V

Dans chacun des cas, on donne le tableau de variation d’une fonction f.
À l’aide de ce tableau, déterminer l’ensemble de définition et les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	2	↘	‖	↗	0
			‖	$-\infty$	
	$-\infty$		‖		

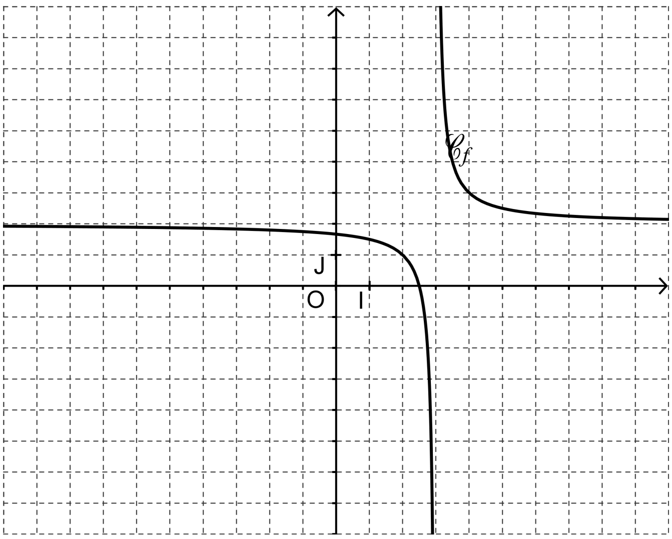
x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Variations de g			2				1
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				0		

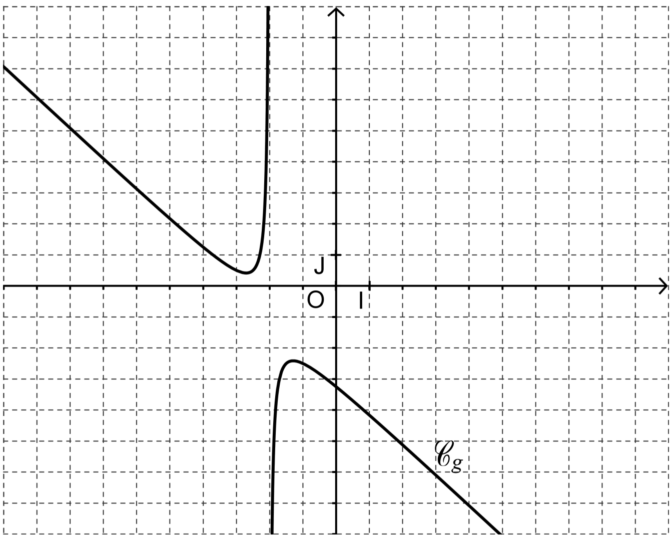
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Variations de h	2		‖		4		‖ $+\infty$		
		↘	‖	↗		↘	‖	↘	
			‖ $-\infty$		$-\infty$		‖		$-\infty$
	$-\infty$								

Exercice 5 : B

On donne ci-dessous les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g.

Déterminer graphiquement l’ensemble de définition de chacune d’elles puis les limites aux bornes de leur ensemble de définition.





Exercice 6 : Détermination d’asymptotes à partir de limites. V

Que peut-on dire des limites suivantes concernant les asymptotes horizontales ou verticales ?

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

Ti2D / Limites
Détermination d’asymptotes à partie des limites

LIMITES DES FONCTIONS DE REFERENCE

Exercice 7 : V

Dans chacun des cas suivants, donner les limites aux bornes de l'ensemble sur lequel la fonction est définie :

1) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^7$.
2) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^{2012}$.
3) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^{17}$.
4) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-\frac{1}{3}x^4$.
5) f définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x)=\frac{1}{x^5}$.
6) f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2}{x^2}$.
7) f définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x)=-\frac{6}{x^3}$.
8) f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=-\frac{1}{3x}$.

Exercice 8 : V

Dans chacun des cas suivants, donner les limites aux bornes de l'ensemble sur lequel la fonction est définie :

1) f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2\ln x$.
2) f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{3x}$.
3) f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x+1}$.
4) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x^2+1}{4}$.

OPERATIONS SUR LES LIMITES

Exercice 9 : opérations sur les limites R

Déterminer les limites suivantes en détaillant et en justifiant les propriétés utilisées (somme, produit ou quotient) :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+\frac{1}{x}+2$
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+\sqrt{x}-2$
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+1)\left(\frac{1}{x}-2\right)$
d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-6+\frac{1}{x}}{4x-2}$
e) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{x^2-10}{x-2}$
f) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{1}{x-3}$
g) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \frac{1}{x-3}$

Ti2D / Limites
Opérations sur les limites

Exercice 10 : R

1) Rappeler les formes à retenir sur les limites de ln.
2) Déterminer les limites des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition :
   a) $f_1(x)=\frac{3}{x}-x\ln x$ définie sur $]0;+\infty[$.
   b) $f_2(x)=x^2+\frac{x}{\ln x}$ définie sur $]0;+\infty[$.
   c) $f_3(x)=\ln(x)-x$ définie sur $]0;+\infty[$.

FORMES INDETERMINEES

Exercice 11 : R

Dans chacun des cas suivants, déterminer les limites aux bornes de l'ensemble sur lequel la fonction est définie :

1) f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{x}$.
2) f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=(1-2\sqrt{x})(1-3x)$.
3) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(7x+3)^2(5x+9)$.
4) f définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par : $f(x)=(x+2)\ln x$.
5) f définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x^5}$.
6) f définie sur $]\,3\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{-x+3}$.
7) f définie sur $]-2\,;2\,[$ par : $f(x)=-\dfrac{3}{x^2-4}$.
8) f définie sur $]-\infty;0\,[$ par : $f(x)=4+\dfrac{3}{x}$.

Exercice 12 : R

Déterminer les limites en $-\infty$, en $+\infty$ et en 1 des fonctions suivantes :

1) $f(x)=-3x^2+4x+1$
2) $f(x)=-x^3+x+1$
3) $f(x)=x^4-2x^3+x-1$
4) $f(x)=-6x^2+2x^3+1$
5) $f(x)=\dfrac{-3x^2+x+2}{x^2-x-2}$
6) $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+12}{x-2}$
7) $f(x)=\dfrac{3x-5}{3+2x-x^2}$
8) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^5+2x-1}{7x^5+4x^2-6}$
9) $f(x)=\dfrac{4x+1}{1-4x^2}$

Exercice 13 : G

1) f_1 est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_1(x)=2+\dfrac{1}{x}$. Déterminer la limite de f_1 en 1, en -2 et en $+\infty$.
2) f_2 est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_2(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$. Déterminer la limite de f_2 en 3, en $+\infty$ et en $-\infty$.
3) f_3 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x)=x^2-x^3$. Déterminer la limite de f_3 en $-\infty$.
4) f_4 est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_4(x)=x^3\left(-2+\dfrac{3}{x}\right)$. Déterminer la limite de f_4 en $+\infty$ et en $-\infty$.
5) f_5 est la fonction définie sur $]-\infty;0\,[$ par $f_5(x)=\dfrac{1+x}{x^3}$. Déterminer la limite de f_5 en 0 .
6) f_6 est la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par $f_6(x)=\dfrac{-1+\frac{1}{x}}{x^2}$. Déterminer la limite de f_6 en $+\infty$ et en 0.
7) f_7 définie sur $]\,\dfrac{1}{3};+\infty[$ par $f_7(x)=\dfrac{x+1}{3x-1}$. Déterminer la limite de f_7 en $\dfrac{1}{3}$.
8) f_8 définie sur $]-\infty;3\,[$ par $f_8(x)=2x+1+\dfrac{1}{x-3}$. Déterminer la limite de f_8 en 3.

EXERCICES TYPE BAC :

Exercice 14 : R

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{-3}{x^2+x-2}$.

1) a) Résoudre dans IR $x^2+x-2=0$

   b) En déduire le domaine de définition de f.
2) Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3) En déduire l'existence éventuelle d'asymptotes à la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 15 : R

Ti2D / Limites
Carte d'identité de $2 - x + \ln x$

On considère la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = 2 - x + \ln x$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I, J) d'unités graphiques 4 cm.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1) a) Étudier la limite de la fonction f en 0.

   b) En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_f$ dont on précisera une équation.

2) a) Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f(x) = x\left(\frac{2}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x}\right)$

   b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

3) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

4) Étudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

5) Déterminer une équation de T, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 16 : R

On considère la fonction f définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + 3$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I, J) d'unités graphiques 2 cm.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

   b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

3) Étudier les variations de la fonction f puis, dresser son tableau de variations.

4) On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3$.

   a) La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont un point commun E, calculer les coordonnées de E.

   b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

5) On admet l'existence d'un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 0$

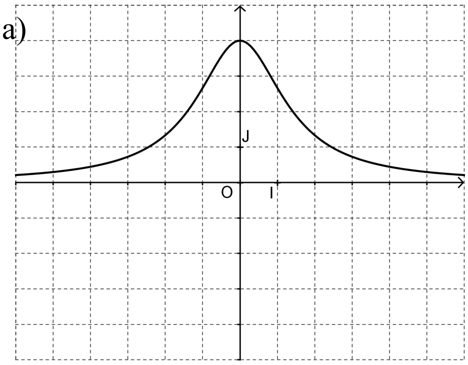
   Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

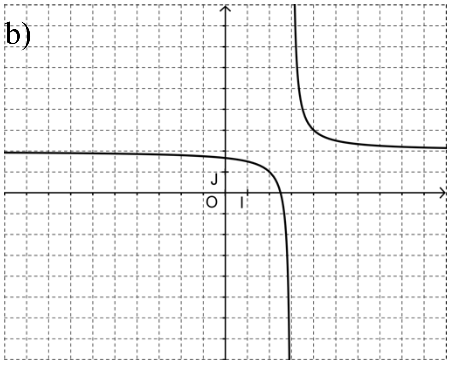
POUR ALLER PLUS LOIN

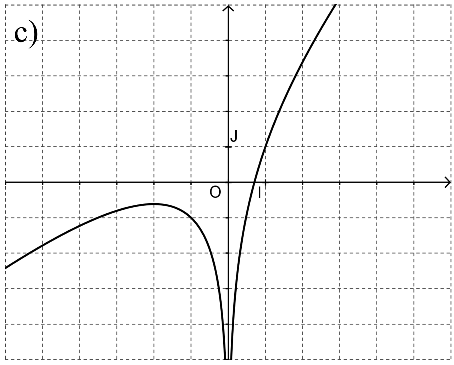
ASYMPTOTES OBLIQUES :

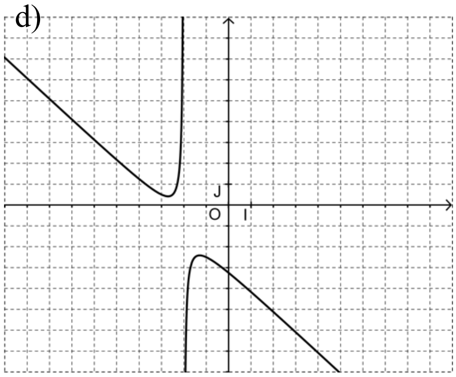
Exercice A : G

Dans chacun des cas suivants, on donne soit la courbe représentative, soit le tableau de variations d'une fonction f.
La courbe représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser leurs équations.

a)


b)


c)


d)


e)

x	$-\infty$		-5		2		7		$+\infty$
Variations de f	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$	↗	$+\infty$ -1 ‖ $+\infty$	↘	

Exercice B : N

On considère la fonction f définie sur $[\,3\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{-6x^2-x+5}{3x+2}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2) Vérifier que pour tout x de $[\,3\,;+\infty[$ $f(x)=-2x+1+\frac{3}{3x+2}$.
3) a) Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.

   b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

LIMITES DE FONCTIONS COMPOSEES :

Exercice C : N

On considère la fonction g définie sur $]-\infty;-1\,[$ par $g(x)=\frac{2x^2-1}{(x+1)^2}$

1) Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g, admet une asymptote verticale D et une asymptote horizontale Δ dont on précisera les équations.
2) a) Etudier le signe de $g(x)-2$ sur $]-\infty;-1\,[$.

   b) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_g$ par rapport à Δ.

Exercice D : N

On considère la fonction f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par $f(x)=3-x-\frac{\ln x}{x}$.

1) Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(3-x))$Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ?
3) a) Déterminer le signe de $f(x)-(3-x)$ sur $]\,0\,;+\infty[$?

   b) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote oblique.