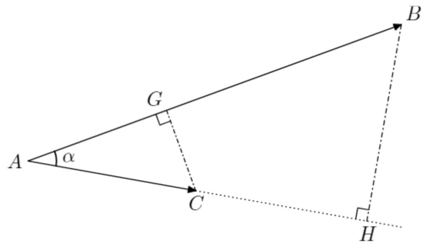
5 exercices d'application : Calcul vectoriel et produit scalaire

Exercice 1

On considère trois points A, B, C distincts deux à deux représentés ci-dessous :



On note G *(resp.* H*)* le projeté orthogonal du point C *(resp.* B*)* sur la droite (AB) *(resp.* (AC)*)* :

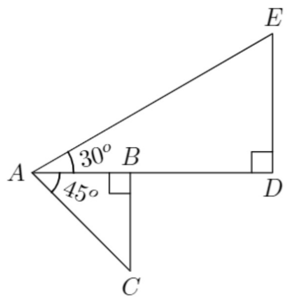
1. a. Dans le triangle AGC rectangle en G, donner l'expression de $\cos\alpha$.

   b. Dans le triangle ABH rectangle en H, donner l'expression de $\cos\alpha$.

2. En déduire l'égalité : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Exercice 2

On considère la figure ci-dessous où : $AE = 4\,cm$ et $AC = 2\,cm$ et on munit le plan du repère orthonormé, orienté dans le sens direct, dont l'unité mesure $1\,cm$, et dont l'axe des abscisses est la droite (AD).



Déterminer la valeur des produits scalaires ci-dessous :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ b. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ c. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}$

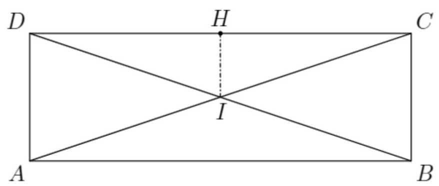
Rappels :

α	0	30^o	45^o	60^o	90^o
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Exercice 3

On considère le rectangle $ABCD$ représenté ci-dessous où I est le point d'intersection de ses diagonales et où les dimensions suivantes sont données :

$AB = 6\,cm$; $BC = 2\,cm$



1. Etablir l'égalité suivante :
$$\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = \frac{1}{4}\cdot AD^2 - \frac{1}{4}\cdot AB^2 = -8$$

2. a. Déterminer la longueur du segment $[IC]$.

   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{DIC}$.

Exercice 4

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$.

1. On considère les trois points :
   $A(-5\,;1)$; $B(-3\,;-5)$; $C(-2\,;2)$.
   Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. On considère les trois points :
   $$D(-3\,;-2)\ ;\ E(1\,;1)\ ;\ F\left(2\,;-\frac{26}{3}\right).$$
   Montrer que le triangle DEF est rectangle. On précisera le sommet de l'angle droit.

Exercice 5

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et les trois points suivants ainsi que leurs coordonnées dans ce repère :

$A(3\,;2)$; $B(5\,;-1)$; $C(-2\,;3)$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Donner les valeurs des produits scalaires suivants :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$

3. Déterminer les distances AB, AC et BC.

4. Déterminer la mesure des 3 angles du triangle ABC arrondis au degré près.

5 exercices d'application : Calcul vectoriel et produit scalaire (Corrigés)

Exercice 1

1. a. Dans le triangle AGC rectangle en G, on a la relation trigonométrique :
$$\cos\alpha = \frac{AG}{AC}$$
b. Dans le triangle ABH rectangle en H, on a la relation trigonométrique :
$$\cos\alpha = \frac{AH}{AB}$$

2. • Le point G est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant de même sens, on a :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG} = AB\times AG$$
$$= AB\times(AC\times\cos\alpha) = AB\times AC\times\cos\alpha$$
• Le point H est le projeté orthogonal du point D sur la droite (AC). Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ étant de même sens, on a :
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH} = AC\times AH$$
$$= AC\times(AB\times\cos\alpha) = AB\times AC\times\cos\alpha$$

Exercice 2

• Dans le triangle ABC rectangle en B.
$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$$
$$\cos(45^o) = \frac{AB}{2}$$
$$AB = 2\cdot\cos(45^o)$$
$$AB = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$AB = \sqrt{2}$$
• Dans le triangle ADE rectangle en D.
$$\cos\widehat{DAE} = \frac{AD}{AE}$$
$$\cos(30^o) = \frac{AD}{4}$$
$$AD = 4\cdot\cos(30^o)$$
$$AD = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$AD = 2\cdot\sqrt{3}$$

a. Le point D est le projeté orthogonal du point E sur la droite (AD).
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ étant colinéaires et de même sens.
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB\times AD = \sqrt{2}\times(2\cdot\sqrt{3})$$
$$= 2\cdot\sqrt{2\times 3} = 2\cdot\sqrt{6}$$

b. Le projeté orthogonal du point C sur la droite (AD) est le point B.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ étant colinéaires et de même sens, on a :
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$$
D'après la question précédente :
$$= 2\cdot\sqrt{6}$$

c. Le point D est le projeté orthogonal du E sur la droite est le point D.
Le vecteur $\overrightarrow{DD}$ étant le vecteur nul, on a :
$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{0} = 0$$

Exercice 3

1. On a :
$$\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = (\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HD})\cdot(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HC})$$
$$= \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{HC}$$
Les droites (IH) et (DC) sont perpendiculaires :
$$= \|\overrightarrow{IH}\|^2+0+0+(-\|\overrightarrow{HD}\|\times\|\overrightarrow{HC}\|)$$
$$= IH^2 - HC^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot AD\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot AB\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\cdot AD^2 - \frac{1}{4}\cdot AB^2 = \frac{1}{4}\times 2^2 - \frac{1}{4}\times 6^2$$
$$= 1 - 9 = -8$$

2. a. Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 6^2 + 2^2$$
$$AC^2 = 36 + 4$$
$$AC^2 = 40$$
$$AC = \sqrt{40} = 2\cdot\sqrt{10}$$
Le point I, intersection des diagonales, est également le milieu du segment $[AC]$:
$$IC = \frac{1}{2}\cdot AC = \sqrt{10}$$

b. On en déduit :
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IC}$ peut s'exprimer par :
$$\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = \|\overrightarrow{ID}\|\times\|\overrightarrow{IC}\|\times\cos\widehat{DIC}$$
$$-8 = \sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\cos\widehat{DIC}$$
$$-8 = 10\times\cos\widehat{DIC}$$
$$\frac{-8}{10} = \cos\widehat{DIC}$$
$$\cos\widehat{DIC} = \frac{-8}{10}$$
$$\widehat{DIC} = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{10}\right)$$
$$\widehat{DIC} \approx 143{,}13$$
$$\widehat{DIC} \approx 143$$

5 exercices d'application : Calcul vectoriel et produit scalaire (Corrigés)

Exercice 4

1. On a les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A) = (-3-(-5)\,;\,-5-1)$
  $= (-3+5\,;-6) = (2\,;-6)$
- $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,;y_C - y_A) = (-2-(-5)\,;2-1)$
  $= (-2+5\,;1) = (3\,;1)$

On a le produit scalaire :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times3 + (-6)\times1 = 6-6 = 0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux : les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Le triangle ABC est rectangle en A.

2. On a les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{ED}(x_D - x_E\,;y_D - y_E) = (-3-1\,;-2-1)$
  $= (-4\,;-3)$
- $\overrightarrow{FD}\Big(-3-2\,;-2-\big(-\frac{26}{3}\big)\Big) = \Big(-5\,;-\frac{6}{3}+\frac{26}{3}\Big)$
  $= \Big(-5\,;\frac{20}{3}\Big)$

On a le produit scalaire :
$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{FD} = -4\times(-5) + (-3)\times\frac{20}{3} = 20-20 = 0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont orthogonaux : les droites (ED) et (DF) sont perpendiculaires. Le triangle EDF est rectangle en D.

Exercice 5

1. On a les coordonnées suivantes de vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$
  $= (5-3\,;\,-1-2) = (2\,;\,-3)$
- $\overrightarrow{AC}(-2-3\,;3-2) = (-5\,;1)$
- $\overrightarrow{BC}(-2-5\,;3-(-1)) = (-7\,;4)$

2. Voici les calculs des produits scalaires demandés :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-5) + (-3)\times1 = -10-3 = -13$
- $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})$
  $= -(2\times(-7) + (-3)\times4) = -[-14+(-12)]$
  $= -(-26) = 26$
- $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = (-\overrightarrow{BC})\cdot(-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$
  $= (-7)\times(-5) + 4\times1 = 35+4 = 39$

3. Le calcul de distance permette d'effectuer les calculs suivants :

- $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2}$
  $= \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
- $AC = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
- $BC = \sqrt{(-7)^2 + 4^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$

4. En utilisant l'autre formule donnant le produit scalaire, on obtient :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$
  $-13 = \sqrt{13}\times\sqrt{26}\times\cos\widehat{BAC}$
  $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{-13}{\sqrt{13}\times\sqrt{26}}$
  $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\Big(\dfrac{-13}{\sqrt{13}\times\sqrt{26}}\Big)$
  $\widehat{BAC} \approx 135^o$
- $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$
  $26 = \sqrt{13}\times\sqrt{65}\times\cos\widehat{ABC}$
  $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{26}{\sqrt{13}\times\sqrt{65}}$
  $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\Big(\dfrac{26}{\sqrt{13}\times\sqrt{65}}\Big)$
  $\widehat{ABC} \approx 26{,}565^o$
  $\widehat{ABC} \approx 27^o$
- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = BC\times AC\times\cos\widehat{BCA}$
  $39 = \sqrt{65}\times\sqrt{26}\times\cos\widehat{BCA}$
  $\cos\widehat{BCA} = \dfrac{39}{\sqrt{65}\times\sqrt{26}}$
  $\widehat{BCA} = \cos^{-1}\Big(\dfrac{39}{\sqrt{65}\times\sqrt{26}}\Big)$
  $\widehat{ABC} \approx 18{,}435^o$
  $\widehat{ABC} \approx 18^o$

Remarque : la mesure du dernier angle aurait pû être déduite de la supplémentarité des angles.