

4 exercices d'approfondissement : Fonctions

Exercice 1 *Exercice* Soit f la fonction définie sur $[-8; 10]$ par
$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 - x^2 + 2x - 5$$

A l'aide d'une calculatrice graphique, dresser le tableau de variation complet de cette fonction.

Exercice 2 1. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{-2}{x} + \frac{1}{6}x^3$$

a) A l'aide de la calculatrice graphique, émettre une conjecture concernant la parité de cette fonction.

b) Démontrer cette conjecture.

Exercice 3 2. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = x^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$
 f est définie sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et sur $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ si $n < 0$.

a) A l'aide de la calculatrice graphique, émettre une conjecture concernant la parité de cette fonction selon les valeurs de n .

b) Démontrer cette conjecture.

Exercice 4 Sur une plage, un maître-nageur dispose d'une ligne de bouées de 60 mètres pour créer une zone rectangulaire de baignade surveillée, comme le montre la figure ci-dessous.



On pose $x = AD$

1. Exprimer l'aire du rectangle ABCD en fonction de x

2. A l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer le maximum de cette aire, et la valeur de x pour laquelle elle est atteinte

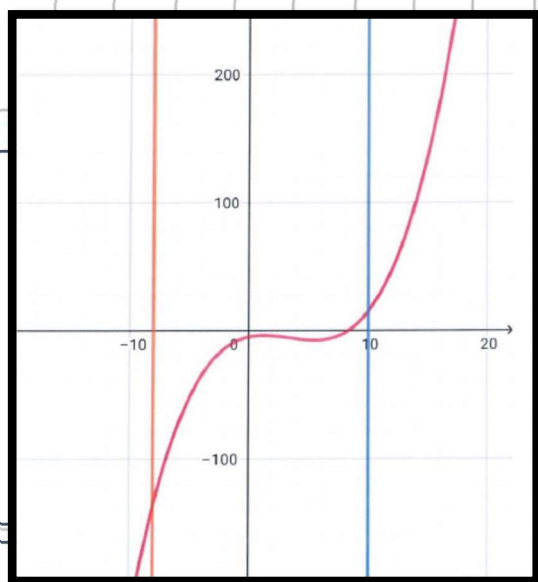
3. Démontrer cette conjecture.



4 exercices d'approfondissement : Fonctions (Corrigés)

Exercice 1

x	-8	1,2	5,4	10
$f(x)$		-3,9		15
	-136,2		-7,6	



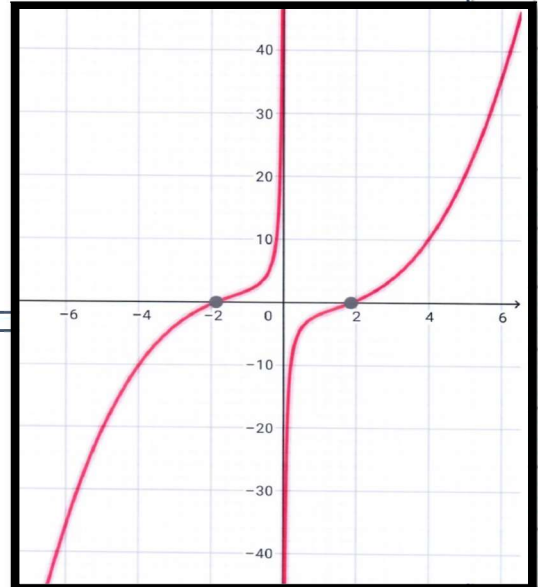
Exercice 2

1.a) La courbe représentative de f admet l'origine O comme centre de symétrie - on peut conjecturer que f est impaire -

b) Démonstration: f est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \bullet \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \bullet \forall x \in D_f, f(-x) &= \frac{-x}{-x} + \frac{1}{(-x)^2} \\ &= \frac{-x}{-x} - \frac{1}{x^2} \\ &= -\left[\frac{-x}{x} + \frac{1}{x^2}\right] \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Ces deux points permettent d'affirmer que f est impaire -



Exercice 3

2. a) • pour n positif et pair, (ex: $f(x) = x^2$, l'axe Oy' est axe de symétrie pour f , on peut conjecturer que f est pair)

• pour n positif et impair (ex: $f(x) = x^3$, l'origine O est centre de symétrie pour f , on peut conjecturer que f est impaire)

• pour n négatif et pair (ex: $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, l'axe Oy' est axe de symétrie pour f , on peut conjecturer que f est pair)

• pour n négatif et impair (ex: $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, l'origine O est centre de symétrie pour f , on peut conjecturer que f est impaire)

b) Revenons tous les cas - f est définie soit sur $\mathbb{R}$ (si $n \geq 0$), soit sur $\mathbb{R}^*$ (si $n < 0$) - Donc

• $\forall x \in D_f, -x \in D_f$. Ensuite pour $n \in \mathbb{Z}$,

$\begin{aligned} \bullet \text{ si } n \text{ est pair} \\ \forall x \in D_f, \\ f(-x) &= (-x)^n \\ &= x^n \quad (n \text{ pair}) \\ &= f(x) \end{aligned}$ f est donc <u>pair</u>.	$\begin{aligned} \bullet \text{ si } n \text{ est impair} \\ \forall x \in D_f, \\ f(-x) &= (-x)^n \\ &= -x^n \quad (n \text{ impair}) \\ &= -f(x) \end{aligned}$ f est donc <u>impaire</u>.
---	--

4 exercices d'approfondissement : Fonctions (Corrigés)

Exercice 4

1. Soit L la longueur du bassin et x la largeur. On sait que l'aire $A(x)$ vaut

$$A(x) = x \times L \quad (1)$$

Et on sait aussi que la longueur de la ligne vaut $60 = 2x + L$ (2)

(2) donne $L = 60 - 2x$ que l'on remplace dans (1):

$$A(x) = x \times [60 - 2x], \text{ soit}$$

$$A(x) = -2x^2 + 60x \\ = -2x[x - 30]$$

Sur la calculatrice, on voit que pour $x = 15m$, l'aire est maximale et vaut $450 m^2$.

a) soient $x_1, x_2 \in [0; 15]$ tels que $x_1 < x_2$

$$f(x_1) = -2x_1^2 + 60x_1$$

$$f(x_2) = -2x_2^2 + 60x_2$$

$$f(x_2) - f(x_1) = -2(x_2^2 - x_1^2) + 60(x_2 - x_1) \\ = -2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 60(x_2 - x_1) \\ = 2(x_2 - x_1)[30 - x_1 - x_2]$$

$$\text{pour } 0 \leq x_1 \leq 15 \quad 0 \leq x_2 \leq 15$$

$$-15 \leq -x_1 \leq 0 \quad -15 \leq -x_2 \leq 0$$

$$-30 \leq -x_1 - x_2 \leq 0$$

$$0 \leq 30 - x_1 - x_2 \leq 30$$

donc positif

et comme $x_2 - x_1 > 0$, $f(x_2) \geq f(x_1)$

ce qui implique que

sur $[0, 15]$ f est croissante.

3) Démonstration

Plusieurs possibilités

• Je remarque que $A(x)$ est un trinôme du second degré possédant 2 racines distinctes et j'utilise la propriété qui indique que l'extremum de la fonction dans ce cas se trouve au milieu des 2 racines : ici $A(x)$ s'annule en 0 et à $x = 30$, le milieu est à $\frac{0+30}{2} = 15$, valeur pour laquelle $A(x)^2$ est extrémum. Comme la concavité de la courbe est vers les y négatifs (à cause du signe $-$ devant le terme en x^2), cet extrémum est un maximum.

Autre : J'étudie $A(x)$ pour $x \in [0, 60]$ et je démontre que

a) $\forall x \in [0; 15]$ $A(x)$ est croissante } ce qui implique
b) $\forall x \in [15; 60]$ $A(x)$ est décroissante } qu'en $x = 15$, $A(x)$ est maximale.

b) soient $x_1, x_2 \in [15; 60]$ tels que $x_1 < x_2$ on a également

$$f(x_2) - f(x_1) = 2 \frac{(x_2 - x_1)(30 - x_1 - x_2)}{2}$$

$$15 \leq x_1 \leq 60$$

$$-60 \leq -x_1 \leq -15$$

$$-120 \leq -x_1 - x_2 \leq -30$$

$$-90 \leq 30 - x_1 - x_2 \leq 0$$

donc négatif

et comme $x_2 - x_1 > 0$, $f(x_2) \leq f(x_1)$

ce qui implique que

sur $[15; 60]$ f est décroissante.

Conclusion : a) + b) implique que f atteint un maximum en $x = 15$ - ce qu'il fallait démontrer.

