

LOI NORMALE

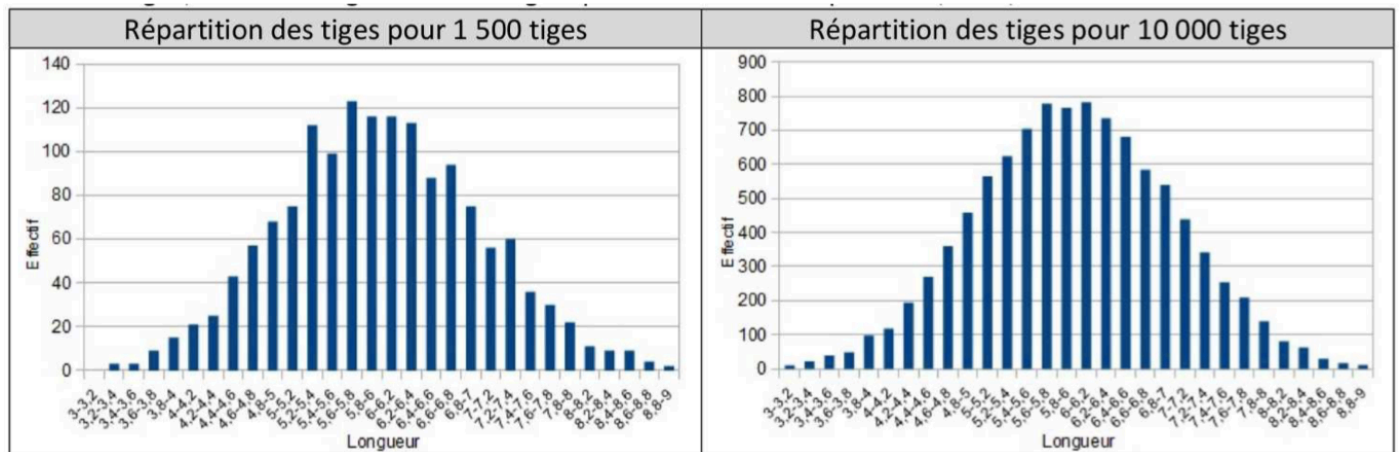
I) Présentation

Une artiste réalise une œuvre à l'aide de tiges métalliques. A partir d'un grand nombre de morceaux mesurant, de manière aléatoire, de 0 à 1 dm, elle soude bout à bout 12 morceaux pour obtenir une tige. Une tige mesure donc de 0 à 12 dm.

L'artiste désire utiliser 1500 ou 10000 tiges et, pour cela, elle simule leur longueur sur tableur dans la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Morceau 1	Morceau 2	Morceau 3	Morceau 4	Morceau 5	Morceau 6	Morceau 7	Morceau 8	Morceau 9	Morceau 10	Morceau 11	Morceau 12	Longueur
2	Tige 1	0.35401274	0.56704262	0.78222074	0.73482199	0.05628004	0.2538151	0.09822488	0.16579375	0.87926618	0.07442848	0.94428594	0.21355885	5.123751305
3	Tige 2	0.38995414	0.52517484	0.29960158	0.52744657	0.1609047	0.68898174	0.91022953	0.99837091	0.79828172	0.16229686	0.93467707	0.53255417	6.928473823
4	Tige 3	0.39578119	0.92022374	0.13902656	0.69806021	0.66946694	0.74687129	0.48343753	0.27521792	0.13397536	0.16628122	0.48684654	0.39668185	5.511870353
5	Tige 4	0.43636346	0.13651107	0.59355023	0.0640642	0.47112342	0.54111586	0.48973778	0.14451482	0.38034378	0.18560903	0.51150525	0.00358489	3.958023791
6	Tige 5	0.78633928	0.58525121	0.46531159	0.23642503	0.81457667	0.03212376	0.6084712	0.54981915	0.75453102	0.29803266	0.51168576	0.53513197	6.177699294
7	Tige 6	0.36003557	0.30202247	0.10444416	0.2242497	0.46180709	0.68207744	0.92822174	0.80648803	0.60443709	0.72336086	0.88273704	0.19566000	6.403696815

La répartition des tiges, dont les longueurs sont regroupées en classe d'amplitude 0,2dm, est donnée ci-dessous :



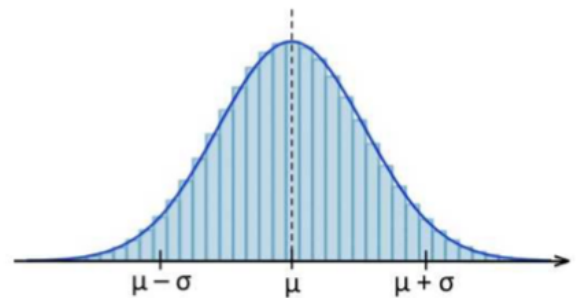
La distribution des effectifs montre une symétrie autour d'une valeur centrale $\mu = 6\text{dm}$, et plus on s'écarte de la valeur centrale, plus les effectifs sont faibles.

On obtient la même configuration avec la distribution des fréquences.

On peut calculer l'écart-type σ de cette série statistique.

Plus on réalise un grand nombre de simulations, ou bien plus on réduit la largeur des classes, plus les sommets des bâtons vont épouser une courbe « en cloche », appelée aussi courbe de GAUSS.

Cette courbe de GAUSS est la représentation graphique de la densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi de probabilité appelée « loi normale »



On retrouve la loi normale dans un très grand nombre de distributions dans la nature, dans l'industriel en économien en médecine ou dans les sciences sociales car beaucoup de phénomènes naturels, industriels, économiques, physiologiques ou sociaux résultent d'un grand nombre de causes de fluctuations indépendantes.

Pour votre culture personnelle et pour un bref historique de la loi normale, vous pouvez lire cette page internet :

<http://xymaths.free.fr/Lycees/TS/Cours-TS/Loi-normale-Generalites-Historique/>

II) Définition

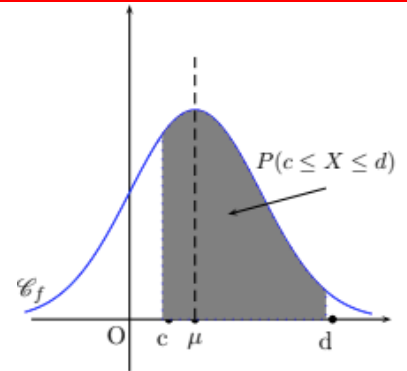
Définition :

Soit μ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$.

La **loi normale $N(\mu ; \sigma)$ d'espérance μ et d'écart-type σ** est la loi à densité dont la fonction de densité est définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Remarque : La formule de la densité d'une loi normale $N(\mu ; \sigma)$ est très complexe. En pratique, on ne l'utilise pas et on se sert de la calculatrice pour calculer des probabilités.



III) Propriétés

Propriété :

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu ; \sigma)$ de fonction de densité f alors :

La courbe représentative de f est **symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$**

L'aire totale entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1

$$P(X \leq \mu) = P(X < \mu) = P(X \geq \mu) = P(X > \mu) = 0,5$$

IV) Calcul de probabilités à l'aide de la calculatrice

Lorsque X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ , pour obtenir la probabilité $P(a \leq X \leq b)$:

TI	CASIO
Aller dans le menu DISTRIB Puis choisir normalFRép Puis compléter : Lower : on met la valeur de a Upper : la valeur de b et on donne les valeurs de μ et σ Puis appuyer sur entrer	Aller dans le menu STAT Sélectionner DIST (en appuyant sur F5) Sélectionner NORM (en appuyant sur F1) Puis sélectionner Ncd (en appuyant sur F2) Ensuite compléter : Data : on choisit variable Lower : on met la valeur de a Upper : on met la valeur de b et on donne les valeurs de μ et σ puis appuyer sur exe

Exemple :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type 4,1.

Calculer $P(81 \leq X \leq 103)$. Arrondir à 10^{-3} .

Sur TI :

```

normalFRép
bornin:81
bornsup:103
μ:100
σ:4.1
    
```

```

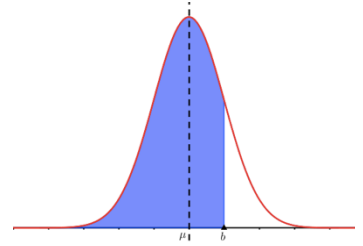
.....
normalFRép(81,103,100,4.1)
.....
0.7678246655
    
```

Ainsi : $P(81 \leq X \leq 103) \approx 0,768$

Remarque 1 :

Pour calculer $P(X \leq b)$, le problème c'est qu'on n'a pas de valeur pour a mais on va se servir de l'approximation suivante :

$$P(X \leq b) \approx P(-10^{99} \leq X \leq b)$$



Exemple :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $4,1$. Calculer $P(X \leq 106)$. Arrondir à 10^{-3} .

Sur TI :

```
normalFRép
bornin: -10^99
bornsup: 106
mu: 100
sigma: 4.1
```

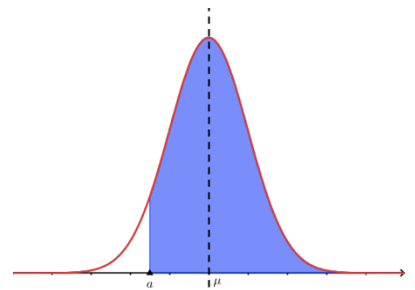
```
normalFRép(-10^99, 106, 100, 4)
0.9283229843
```

Ainsi $P(X \leq 106) \approx 0,928$.

Remarque 2 :

Pour calculer $P(X \geq a)$, le problème c'est qu'on n'a pas de valeur pour b mais on va se servir de l'approximation suivante :

$$P(X \geq a) \approx P(a \leq X \leq 10^{99})$$



Exemple :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $4,1$. Calculer $P(X \geq 98)$. Arrondir à 10^{-3} .

Sur TI :

```
normalFRép
bornin: 98
bornsup: 10^99
mu: 100
sigma: 4.1
```

```
normalFRép(98, 10^99, 100, 4.1)
0.687155972
```

Ainsi $P(X \geq 98) \approx 0,687$

On pourra également regarder les tutos suivants :

Vidéo n°1



PROBA : Calculer une probabilité pour une loi normale - Tutoriel TI
Yvan Monka 127 k vues • il y a 5 ans
Calculer une probabilité pour une loi normale. Pour TI-82, TI-83, TI-84. Site officiel : <http://www.maths-et-tiques.fr> Twitter : <https://twitter.com/mtiques> Facebook :

<https://www.youtube.com/watch?v=kZVL8AR-1ug>

Vidéo n°2

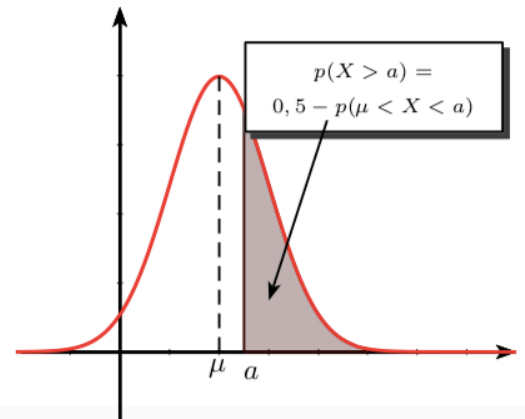
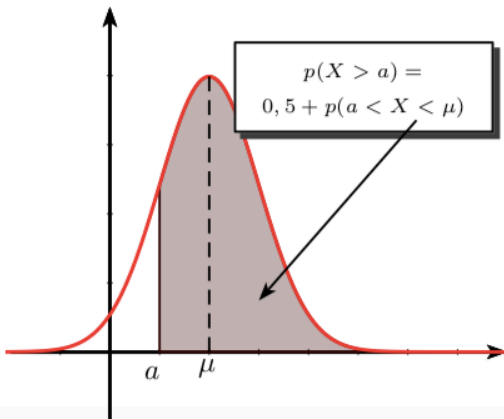
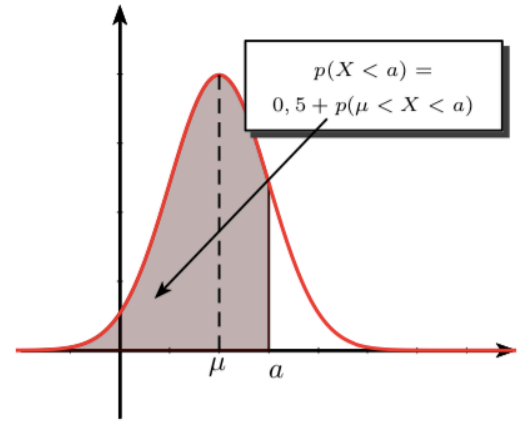
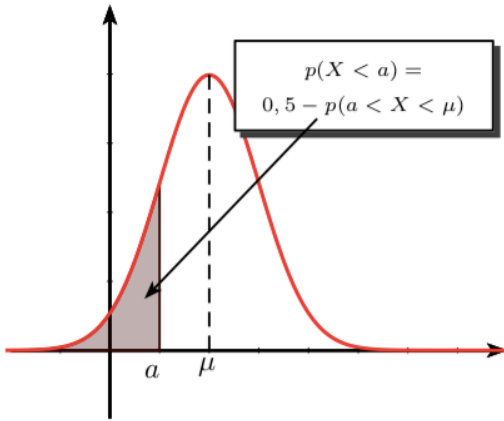


PROBA : Calculer une probabilité pour une loi normale - Tutoriel CASIO
Yvan Monka 123 k vues • il y a 4 ans
Calculer une probabilité pour une loi normale. Graph 35, 75, 85, 95, FX-CG20 Site officiel : <http://www.maths-et-tiques.fr> Twitter : <https://twitter.com/mtiques> Facebook : <https://www.facebook.com/mtiques>

<https://www.youtube.com/watch?v=qD1Nt5fkQa4>

Remarque 3 :

On aurait pu également se servir des découpages suivants :



Exemple :

Les températures du mois de juillet autour du lac Léman suivent la loi normale d'espérance 18,2°C et d'écart-type 3,6°C. Calculer la probabilité que la température un jour de juillet :

- a) Soit inférieure à 16°C.
- b) Soit comprise entre 20°C et 24,5°C.
- c) Soit supérieure à 21°C.

CORRECTION :

a) $P(T < 16) = P(T \leq 16) \approx 0,271$

normalFRép

bornin: -10^99
bornsup: 16
 μ : 18.2
 σ : 3.6

```
normalFRép( -10^99, 16, 18.2, 3.6 )
0.2705629552
```

b) $P(20 \leq T \leq 24,5) \approx 0,268$

normalFRép

bornin: 20
bornsup: 24.5
 μ : 18.2
 σ : 3.6

```
normalFRép( 20, 24.5, 18.2, 3.6 )
0.2684784187
```

c) $P(T > 21) = P(T \geq 21) \approx 0,218$

normalFRép

bornin: 21
bornsup: 10^99
 μ : 18.2
 σ : 3.6

```
normalFRép( 21, 10^99, 18.2, 3.6 )
0.2183499461
```

V) Les intervalles « un, deux, trois sigmas »

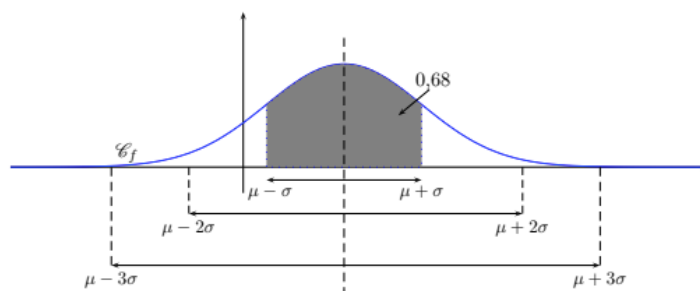
Propriété :

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu; \sigma)$ alors :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$$



Exemple :

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des tiges métalliques. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tige prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur en millimètres. On suppose que X suit une loi normale d'espérance 100 et d'écart-type σ . On admet que la probabilité qu'une tige prélevée au hasard ait une longueur comprise entre 98 et 102 mm est 0,954.

On peut alors déterminer une valeur approchée de σ en utilisant la deuxième approximation :

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$$

$$P(100 - 2\sigma \leq X \leq 100 + 2\sigma) \approx 0,954$$

Or d'après l'énoncé on a : $P(98 \leq X \leq 102) \approx 0,954$

Donc $100 - 2\sigma = 98$ et $100 + 2\sigma = 102$

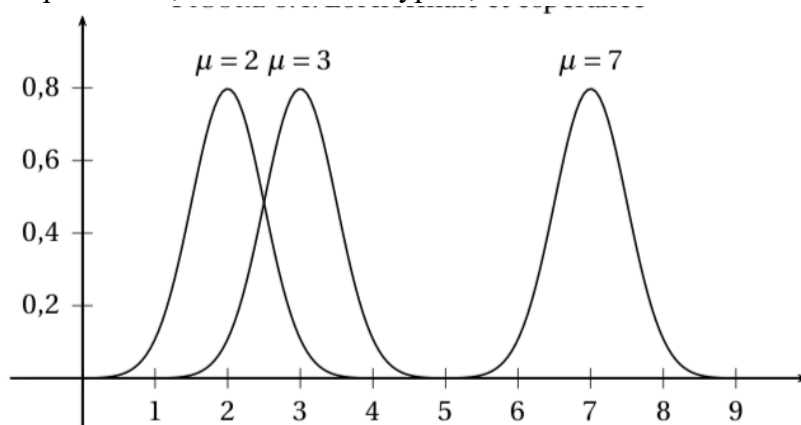
Donc $2\sigma = 2$

Donc $\sigma = 1$

VI) Influence des paramètres

1) Loi normale et espérance

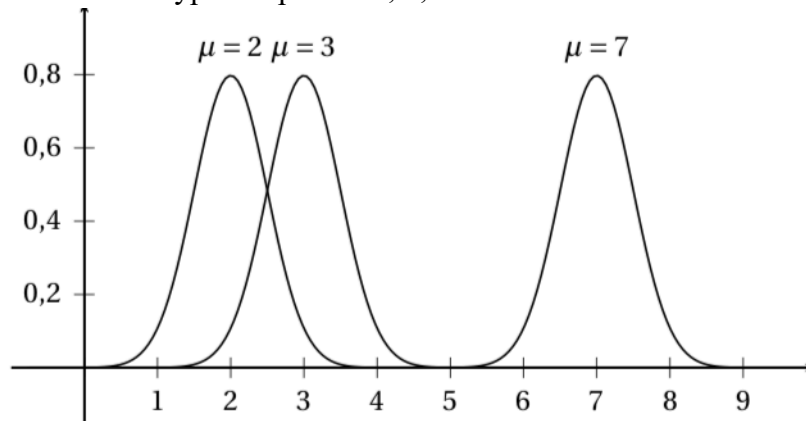
On représente sur la figure trois courbes de fonctions de densité de probabilité correspondant à trois lois normales d'espérances respectives 2, 3 et 7 et d'écart-type 0,5.



On constate que les courbes sont identiques. Elles sont juste décalées (rappel : la courbe est symétrique par rapport à $x = \mu$).

2) Loi normale et écart-type

On présente sur la figure trois courbes de fonctions de densité de probabilité correspondant à trois lois normales d'espérance 4 et d'écart-types respectifs 0,5, 1 et 2.

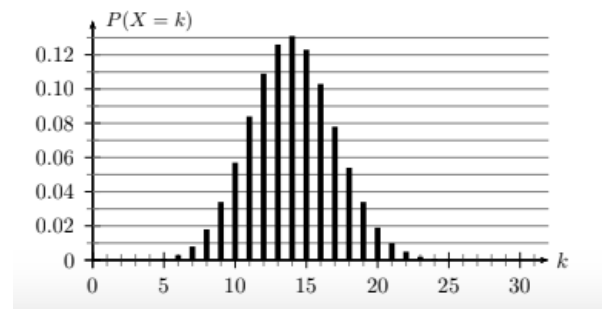


On constate que plus l'écart-type est important et plus la courbe de la fonction de densité est « évasée » et plus le maximum est petit. En effet, un écart-type important signifie que la dispersion des données est importante.

VII) Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Sur le graphique ci-contre, on a représenté la probabilité $P(X = k)$ en fonction de $k \in \{0; 1; \dots; 40\}$ quand X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,35$.

On constate qu'il y a une certaine analogie entre la représentation graphique de la répartition des probabilités de cette loi binomiale et la représentation graphique de la densité de probabilité d'une loi normale.



Propriété :

Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(n; p)$ de paramètres n et p avec $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$, alors la loi de X peut être approchée par la loi d'une variable aléatoire Y suivant la loi normale $N(\mu; \sigma)$ de même espérance et de même écart-type : $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$.