1. Mécanique du point en référentiel non galiléen (programme 3.1)

Gaspard-Gustave Coriolis (Paris 1792-Paris 1843). Après ses études à l'École polytechnique et au Corps des ponts et chaussées, il devient professeur d'analyse et de mécanique à l'École polytechnique et à l'École centrale. Il formule le théorème qui porte son nom. Il introduit le terme de "travail" et formule le théorème de l'énergie cinétique sous la forme utilisée actuellement.

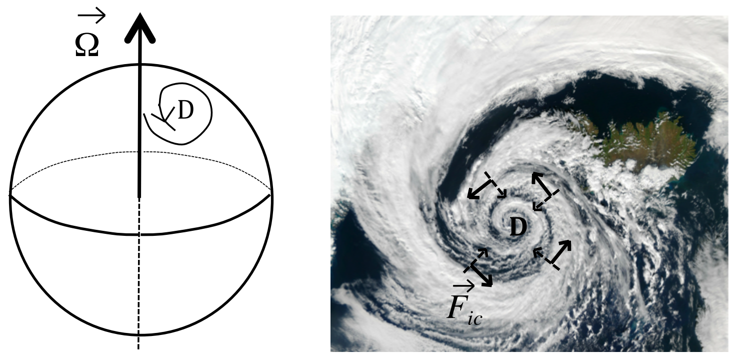


Figure 1: Dépression dans l'hémisphère Nord. En raison de la rotation de la Terre sur elle-même, les masses d'air en mouvement vers la dépression (flèches en pointillé) sont déviées par la force de Coriolis (flèches en trait plein) : photo satellite d'un système dépressionnaire sur l'Islande)

I. Relation newtonienne de composition des vitesses et accélérations

I.1. Dérivation par rapport au temps

Soient R référentiel muni du repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et R_1 référentiel muni du repère $(O_1; \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$. Ici, le temps étant supposé universel, c'est-à-dire identique dans R et dans R_1 (pas de relativité). Soit un vecteur $\overrightarrow{A} = a(t)\overrightarrow{i} + b(t)\overrightarrow{j} + c(t)\overrightarrow{k} = a_1(t)\overrightarrow{i_1} + b_1(t)\overrightarrow{j_1} + c_1(t)\overrightarrow{k_1}$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right]_R = \dot{a}\,\overrightarrow{i} + \dot{b}\,\overrightarrow{j} + \dot{c}\,\overrightarrow{k} \text{ et } \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right]_{R_1} = \dot{a_1}\overrightarrow{i_1} + \dot{b_1}\overrightarrow{j_1} + \dot{c_1}\overrightarrow{k_1}$$

Les deux cas au programme sont

- la translation pure d'un référentiel par rapport à l'autre

On peut choisir les axes liés à chaque référentiel de telle sorte qu'ils restent parallèles deux à deux : (O_1x_1) reste parallèle à (Ox). Alors $\overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j_1} = \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k_1} = \overrightarrow{k}$, donc $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c$.

$$\left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right]_R = \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right]_{R_1}$$

- la rotation uniforme pure d'un référentiel par rapport à un autre : supposons $\underline{R_1}$ en rotation autour de l'axe fixe (Oz) de R à la vitesse angulaire ω constante, et $O = O_1$. Alors le vecteur rotation de R_1 par rapport à R est $\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{k}$ et

$\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt}]_R = \omega\overrightarrow{j_1} \qquad \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt}]_R = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{i_1}$

$\frac{d\overrightarrow{j_1}}{dt}]_R = -\omega\overrightarrow{i_1} \qquad \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{j_1}}{dt}]_R = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{j_1}$

$\left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right]_R = \left.\frac{d\left(a_1\overrightarrow{i_1} + b_1\overrightarrow{j_1} + c_1\overrightarrow{k_1}\right)}{dt}\right]_R$, d'où

$$\left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right]_R = \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{A} \tag{1}$$

Remarque : la relation 1 est valide pour un mouvement quelconque de R_1 par rapportà R, $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega}(t)$ étant le vecteur rotation instantanée d'un solide lié à R_1 étudié dans R.

I.2. Vitesses

$\overrightarrow{V(M)}]_R = \dot{x}\,\overrightarrow{i} + \dot{y}\,\overrightarrow{j} + \dot{z}\,\overrightarrow{k}$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{V(M)}]_{R_1} = \dot{x_1}\,\overrightarrow{i_1} + \dot{y_1}\,\overrightarrow{j_1} + \dot{z_1}\,\overrightarrow{k_1}$

$$\overrightarrow{V(M)}]_R = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}]_R = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}]_R + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}]_R$$

- Cas général

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(M)}]_R &= \tfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}]_R = \tfrac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}]_R + \tfrac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}]_R \\ &= \underbrace{\overrightarrow{V(O_1)}]_R + x_1\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt}]_R + y_1\frac{d\overrightarrow{j_1}}{dt}]_R + z_1\frac{d\overrightarrow{k_1}}{dt}]_R}_{} + \dot{x_1}\,\overrightarrow{i_1} + \dot{y_1}\,\overrightarrow{j_1} + \dot{z_1}\,\overrightarrow{k_1} \\ &= \qquad\qquad \overrightarrow{V_e} \qquad\qquad + \qquad \overrightarrow{V(M)}]_{R_1}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{V_e}$ est la vitesse d'entraînement. C'est la vitesse d'un point qui serait fixe dans R_1, mesurée dans R (on l'appelle parfois vitesse du point coïncident).

$$\overrightarrow{V(M)}]_R = \overrightarrow{V(O_1)}]_R + \overrightarrow{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{V(M)}]_{R_1}$$

- <u>Cas où R_1 est en translation pure par rapport à R</u> :

$$\overrightarrow{V(M)}]_R = \overrightarrow{V(O_1)}]_R + \overrightarrow{V(M)}]_{R_1}$$

- <u>Cas où R_1 est en rotation pure uniforme autour d'un axe fixe de R à la vitesse angulaire ω constante :</u> $O = O_1$ et $\overrightarrow{\omega} = \omega\,\overrightarrow{k}$.

$$\overrightarrow{V(M)}]_R = \overrightarrow{V(M)}]_{R_1} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Si H est la projection de M sur l'axe de rotation (z'z), en utilisant la base mobile $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k})$:

$$\overrightarrow{V(M)}]_R = R\omega\overrightarrow{u_\theta} + \overrightarrow{V(M)}]_{R_1}$$

I.3. Accélérations

$\overrightarrow{a(M)}]_R = \ddot{x}\,\overrightarrow{i} + \ddot{y}\,\overrightarrow{j} + \ddot{z}\,\overrightarrow{k}$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{a(M)}]_{R_1} = \ddot{x_1}\,\overrightarrow{i_1} + \ddot{y_1}\,\overrightarrow{j_1} + \ddot{z_1}\,\overrightarrow{k_1}$

- Cas général

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a(M)}]_R &= \tfrac{d\overrightarrow{v(M)}}{dt}]_R = \tfrac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}]_R + \tfrac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}]_R \\ &= \underbrace{\overrightarrow{a(O_1)}]_R + x_1\frac{d^2\overrightarrow{i_1}}{dt^2}]_R + y_1\frac{d^2\overrightarrow{j_1}}{dt^2}]_R + z_1\frac{d^2\overrightarrow{k_1}}{dt^2}]_R}_{} + \underbrace{2(\dot{x_1}\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt}]_R + \dot{y_1}\frac{d\overrightarrow{j_1}}{dt}]_R + \dot{z_1}\frac{d\overrightarrow{k_1}}{dt}]_R)}_{} + \ddot{x_1}\,\overrightarrow{i_1} + \ddot{y_1}\,\overrightarrow{j_1} + \ddot{z_1}\,\overrightarrow{k_1} \\ &= \qquad\qquad \overrightarrow{a_e} \qquad\qquad + \qquad\qquad \overrightarrow{a_c} \qquad\qquad + \quad \overrightarrow{a(M)}]_{R_1}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{a_e}$ est l' accélération d'entraînement. C'est l'accélération d'un point qui serait fixe dans R_1, mesurée dans R (on l'appelle parfois accélération du point coïncident)

$\overrightarrow{a_c}$ est l'accélération de Coriolis (ou complémentaire)

- <u>Cas où R_1 est en translation</u> par rapport à

$$\overrightarrow{a(M)}]_R = \overrightarrow{a(O_1)}]_R + \overrightarrow{a(M)}]_{R_1}$$

- Cas où R_1 est en rotation par rapport à R avec $O = O_1$ et un vecteur rotation $\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{k}$ constant

$$\overrightarrow{a(M)}]_R = \overrightarrow{a(M)}]_{R_1} + 2\overrightarrow{\omega(t)} \wedge \overrightarrow{V(M)}]_{R_1} + \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

Si H est la projection de M sur l'axe de rotation (z'z) : $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$

$$\overrightarrow{a(M)}]_R = \overrightarrow{a(M)}]_{R_1} + 2\overrightarrow{\omega(t)} \wedge \overrightarrow{V(M)}]_{R_1} - \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

- Cas général (hors programme) : pour un mouvement quelconque de R_1 par rapport à R, avec un vecteur rotation instantanée $\overrightarrow{\omega(t)}$, l'accélération d'entraînement devient

$$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a(O_1)}]_R + \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}\Big]_R \wedge \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

II. Lois de la dynamique en référentiel non galiléen

$m\overrightarrow{a(M)}]_R = \sum \overrightarrow{f} \qquad \Rightarrow m\overrightarrow{a(M)}]_{R_1} = \sum \overrightarrow{f} - m\overrightarrow{a_e} - m\overrightarrow{a_c}$

$\overrightarrow{f}_{ie} = -m\overrightarrow{a_e}$ est la force d'inertie d'entraînement

$\overrightarrow{f}_{ic} = -m\overrightarrow{a_c}$ est la force d'inertie de Coriolis

$$m\overrightarrow{a(M)}]_{R_1} = \sum \overrightarrow{f} + \overrightarrow{f_{ie}} + \overrightarrow{f_{ic}}$$

Les lois de la dynamique (loi fondamentale de la dynamique, théorème du moment cinétique, théorème de l'énergie cinétique) restent vraies en référentiel non galiléen, à condition de tenir compte des forces d'inertie.

Remarque : par sa définition, le travail de la force d'inertie de Coriolis est nul et n'intervient pas dans le théorème de l'énergie cinétique

Dans la pratique...

- Cas de la translation pure :

$$m\overrightarrow{a(M)}]_{R_1} = \sum \overrightarrow{f} - m\overrightarrow{a(O_1)}]_R$$

  $\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{a(O_1)}]_R$ est uniforme.

- Cas de la rotation uniforme pure avec $O = O_1$ et $\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{k}$ constant :

$$m\overrightarrow{a(M)}]_{R_1} = \sum \overrightarrow{f} + m\omega^2 \overrightarrow{HM} - 2m\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{V(M)}]_{R_1}$$

Remarque : la force d'inertie (la force "centrifuge") dérive ici d'une énergie potentielle. En coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{f_{ie}} = m\omega^2 r\overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{\nabla}(\frac{m\omega^2 r^2}{2})$

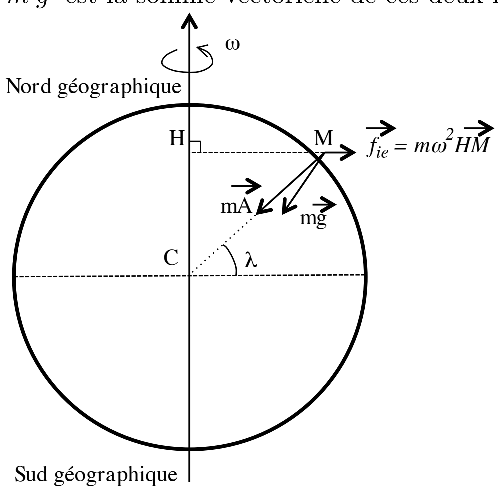
III. Quelques conséquences sur Terre

III.1. Conséquences de la rotation de la Terre sur elle-même (référentiel terrestre)

Le référentiel géocentrique étant supposé galiléen, la Terre est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles.

- Champ de pesanteur, champ d'attraction gravitationnelle

La Terre, considérée comme une répartition de masse à symétrie sphérique de rayon R_T, exerce sur un objet situé à sa surface un champ gravitationnel $\overrightarrow{A}$ dirigé vers le centre de la Terre. En référentiel terrestre, un objet immobile M à la surface terrestre est soumis d'une part à la force d'attraction gravitationnelle $m\overrightarrow{A}$, d'autre part à la force d'inertie d'entraînement centrifuge $m\omega^2\overrightarrow{HM}$, qui dépend de la latitude λ par $HM = R_T \cos\lambda$. Par définition le poids $m\overrightarrow{g}$ est la somme vectorielle de ces deux forces.



La verticale d'un lieu est définie comme la direction prise par un fil à plomb en équilibre. C'est la direction du poids.

- Chute vers l'Est
- Sens de déplacement des masses d'air autour d'une dépression ou d'un anticyclone, sens de déplacement des courants marins.

III.2. Conséquences du mouvement circulaire de la Terre autour du Soleil (référentiel géocentrique)

Le référentiel géocentrique est en translation circulaire autour du Soleil S à la vitesse angulaire Ω. Un point à la surface de la Terre est soumis entre autres forces à l'attraction gravitationnelle du Soleil, et à la force d'inertie d'entraînement. La somme de ces deux forces est le terme de marée. Il est responsable des marées semi-diurnes sur Terre (en réalité, c'est le terme de marée dû à la Lune qui domine, voir analyse doc.)