

# 7. Magnétostatique



**André-Marie Ampère** Lyon 1775- Marseille 1836

Professeur de Physique, il est nommé professeur d'analyse et de mécanique à l'Ecole Polytechnique. Indépendamment d'Avogadro, il propose l'hypothèse selon laquelle un même volume de gaz contient un même nombre de molécules dans les mêmes conditions de T, P. Impressionné par l'expérience d'Oersted, il confirme l'origine électrique du magnétisme et réalise des expériences sur les forces magnétiques qui existent entre deux circuits électriques. Il invente le galvanomètre, le solénoïde et le concept de l'électro-aimant. En 1824, il est nommé professeur au Collège de France.

Théorème d'Ampère

« Bonhomme d'Ampère »

L'Ampère : unité de courant électrique adoptée en 1872.

## I. Sources et effets des champs magnétiques

### I.1. Sources

Le champ magnétique  $\vec{B}$  s'exprime en Tesla. Il a pour sources :

- les aimants (les aimants sont connus depuis l'antiquité, la boussole est utilisée depuis le moyen-âge) : dans les aimants, l'origine du champ magnétique peut être décrite en termes de courants microscopiques orbitaux ou de spin dans la matière.

- les courants macroscopiques (Oersted, 1820)

- les mouvements de convection internes aux astres.

Ordres de grandeur : composante horizontale de  $\vec{B}_{\text{terrestre}} 2 \cdot 10^{-5} \text{T}$ , champ maximal obtenu sur Terre de l'ordre de 10 T

### I.2. Actions

- Force de Lorentz sur une charge :  $\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q_0 \vec{V} \wedge \vec{B}$

- Force de Laplace sur un conducteur parcouru par un courant :  $d\vec{F}_{\text{Laplace}} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$  ou  $d\vec{F}_{\text{Laplace}} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$

- Sur un moment magnétique :  $\vec{M} \wedge \vec{B}$

## II. Symétries des champs magnétiques

### II.1. Symétrie et antisymétrie dans les distributions de courant

Le plan P est un plan de symétrie d'une distribution de courant quand, en faisant une symétrie par rapport à ce plan, le courant est inchangé ( même intensité, même sens).

Le plan P\* est un plan d'antisymétrie d'une distribution de courant quand, en faisant une symétrie par rapport à ce plan, le courant est changé en un courant de même intensité mais circulant en sens opposé ( $\vec{j}$  est changé en  $-\vec{j}$ )

## II.2. Symétries des champs magnétostatiques

D'après la loi de Curie, les symétries des causes se retrouvent dans les symétries des effets. L'action d'un champ magnétique faisant apparaître un produit vectoriel, ses propriétés de symétrie sont liées à l'orientation de l'espace qui permet de définir le produit vectoriel. Or, une translation ou une rotation  $T$  conserve le produit vectoriel, c'est-à-dire que si  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ ,  $T(\vec{c}) = T(\vec{a}) \wedge T(\vec{b})$ . En revanche, ce n'est pas le cas des symétries par rapport à un plan :  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ ,  $T(\vec{c}) = -T(\vec{a}) \wedge T(\vec{b})$ .

**II.2.a. Conséquences sur les paramètres d'espace de  $\|\vec{B}\|$**  Soit  $T$  une translation ou une rotation ou une symétrie par rapport à un plan, soit  $D$  une distribution de courants. Comme  $T$  conserve la norme :

$$\left. \begin{array}{l} T(D) = D \\ M' = T(M) \end{array} \right\} \implies \|\overrightarrow{B(M')}\| = \|\overrightarrow{B(M)}\|$$

### II.2.b. Conséquences sur la direction de $\|\vec{B}\|$

- Cas d'une distribution de courants invariante par rotation ou translation

Soit  $T$  une translation ou une rotation, soit  $D$  une distribution de courants

$$\left. \begin{array}{l} T(D) = D \\ M' = T(M) \end{array} \right\} \implies \overrightarrow{B(M')} = T(\overrightarrow{B(M)})$$

- Cas d'une distribution de courants symétrique ou antisymétrique par rapport à un plan

Soit  $D$  une distribution de courants symétrique par rapport à un plan  $P$ , soit  $S$  la symétrie par rapport à ce plan

$$\left. \begin{array}{l} S(D) = D \\ M' = S(M) \end{array} \right\} \implies \overrightarrow{B(M')} = -S(\overrightarrow{B(M)})$$

Soit  $D$  une distribution de courants antisymétrique par rapport à un plan  $P^*$ , soit  $S^*$  la symétrie par rapport à ce plan

$$M' = S^*(M) \implies \overrightarrow{B(M')} = S^*(\overrightarrow{B(M)})$$

Conséquences:

- En un point  $M$  d'un plan de symétrie  $P$  d'une distribution de courant, le champ  $\overrightarrow{B(M)}$  est perpendiculaire au plan  $P$ .
- En un point  $M$  d'un plan d'antisymétrie  $P^*$  d'une distribution de courant, le champ  $\overrightarrow{B(M)}$  est contenu dans le plan  $P^*$ .

$\vec{B}$  est un pseudo-vecteur

## III. Propriétés du champ magnétique

### III.1. Les équations de Maxwell de la magnéto-statique

En régime permanent :

$$\begin{array}{ll} \text{Maxwell-flux de } \vec{B} & \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad \iff \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \text{Maxwell-Ampère} & \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \quad \iff \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \end{array}$$

avec  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$ .

### III.2. Circulation de $\vec{B}$

$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \iff$  Pour tout contour fermé orienté et toute surface  $S$  s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

**Théorème d'Ampère** (valable dans l'ARQS également)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

La circulation du champ magnétique sur un contour fermé est égale au courant enlacé par le contour multiplié par  $\mu_0$ .

Conséquence : Une ligne de champ de  $B$  fermée enlace forcément une ligne de courant.

### III.3. Flux de $\vec{B}$

$\text{div} \vec{B} = 0 \iff$  Pour toute surface fermée  $S$ ,  $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  : Le flux de  $\vec{B}$  est conservatif.

Conséquence: sur un tube de champ fermé à ses extrémités par  $S_1$  et  $S_2$  :  $\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2$

### III.4. Lignes de champ de $\vec{B}$

Les lignes de champ de  $\vec{B}$ , orientées dans le sens du champ, sont normales aux plans de symétrie de la distribution de courant. Elles enlacent les régions où circule le courant et sont orientées de telle sorte que le courant enlacé par une ligne de champ est positif (orientation du contour cohérente avec l'orientation de la surface à travers laquelle est calculé le courant). Les lignes de champ de  $\vec{B}$  se resserrent quand  $\|\vec{B}\|$  augmente.

## III. Détermination de champs magnétiques

On utilise le théorème d'Ampère (réservé aux distributions très symétriques). Démarche obligatoire:

-détermination de la direction du champ en tout point de l'espace

-détermination des paramètres d'espace dont dépend le norme du champ

-choix d'un contour fermé tel qu'en tout point le champ  $\vec{B}$  est soit normal soit tangent à la surface

-application du théorème

À connaître et savoir faire: champ créé en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{u}_\theta$ , par un cylindre infini, par un solénoïde infini  $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$  à l'intérieur du solénoïde et  $\vec{B} = \vec{0}$  à l'extérieur, nappe de courant plane, etc..

## IV. Discontinuité de $\vec{B}$ à la traversée d'une nappe de courant

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$$

## IV. Énergie magnétostatique

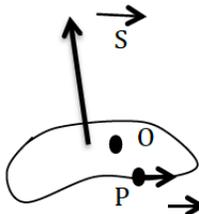
L'énergie magnétostatique est

$$E_{\text{mag}} = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot d\tau$$

Application au calcul d'inductances

## V. Dipôle magnétostatique

- Définition: pour une spire parcourue par un courant  $i$ , on définit son vecteur surface, indépendant de l'origine  $O$ .  $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint \vec{OP} \wedge d\vec{l}$ .

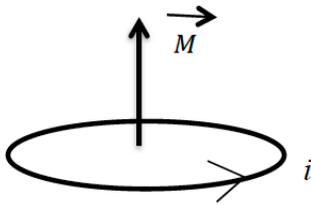


$$d\vec{l} \quad \vec{S} = \iint_S \frac{1}{2} r^2 d\theta \vec{u}_z \text{ en coordonnées cylindriques pour une spire plane}$$

et son moment dipolaire magnétique

$$\vec{M} = i \vec{S}$$

(en  $A.m^2$ ). Le vecteur surface est orienté en accord avec l'orientation de la spire. Le signe de  $i$  dépend de cette orientation, donc le sens de  $\vec{M}$  est indépendant de ce choix.



- Champ créé par un dipôle magnétique

On se place dans l'approximation dipolaire: on étudie les effets de la distribution de courants à une distance grande devant les dimensions de la spire. Alors le champ créé par la spire en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de la spire est en coordonnées sphériques:

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos(\theta)}{r^3}$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin(\theta)}{r^3}$$

$$B_\varphi = 0$$

Remarques:

- Analogie avec le champ créé par un dipôle électrostatique. Soit  $\vec{B} = -\text{grad} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \cos(\theta)}{r^2} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{M} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{M})$ . Attention les lignes de champ du dipôle électrostatique et du dipôle magnétique ne sont les mêmes que dans le cadre de l'approximation dipolaire (à très "grande" distance)
- Généralisation: les expressions obtenues dans le cas d'une spire s'étendent pour une distribution volumique  $\vec{M} = \iiint \frac{1}{2} \vec{OP} \wedge \vec{j} d\tau$  ou dans le cas de la matière aimantée (qu'on peut décrire en termes de courants microscopiques).
- Exemples:
  - Champ magnétique terrestre : il peut être décrit comme produit par un dipôle magnétique de moment incliné sur l'axe géographique terrestre, et de module  $M = 8.10^{22} A.m^2$ . Le pôle nord magnétique est à proximité du pôle sud géographique et vice-versa. En France le champ magnétique a une composante horizontale de  $2.10^{-5} T$ .

- Au niveau microscopique, un électron atomique possède un moment magnétique orbital  $\vec{M}$  tel que  $M_z = -m_l \mu_B = -m_l \frac{e\hbar}{2m}$  où  $m_l$  est le nombre quantique magnétique ( $\mu_B = 0,93.10^{-23} A.m^2$ ), et un moment magnétique de spin, lui aussi quantifié.

- Actions subies en présence d'un champ  $\vec{B}_0$  extérieur

On se place dans l'approximation dipolaire : l'extension du dipôle est faible devant les distances caractéristiques de variation de  $\vec{B}_0$ .

résultante  $\vec{R} = \vec{0}$  si le champ  $\vec{B}_0$  est uniforme

couple  $\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0$

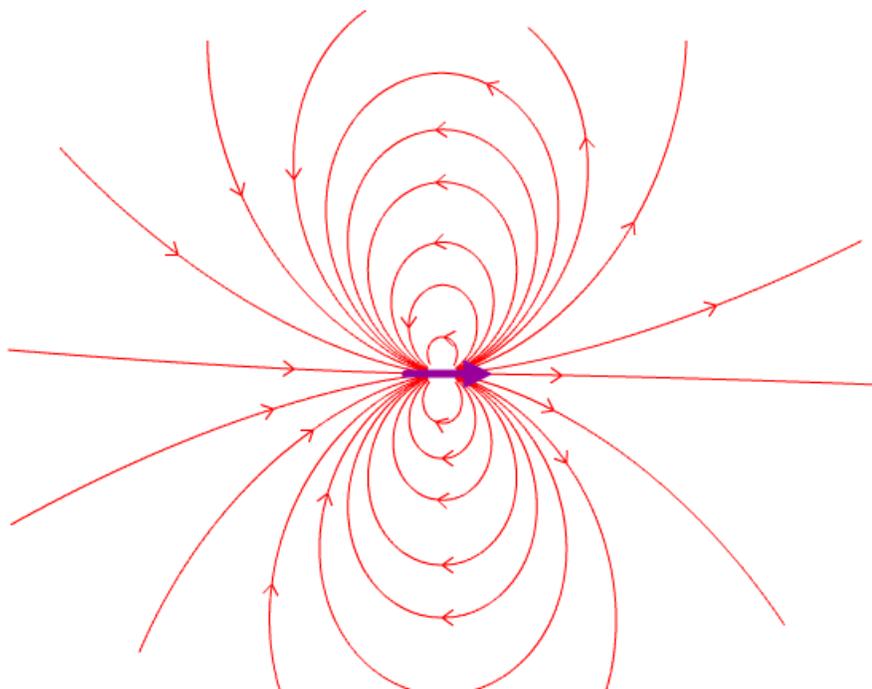
énergie potentielle  $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0$

L'expression de  $E_p$  montre que le dipôle tend à s'aligner avec le champ et à se déplacer vers les zones de champ intense. Si le champ n'est pas uniforme;  $\vec{R} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$  (non exigible)

## Comparaison des propriétés des champs électrostatique et magnétostatique

$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ les lignes de champ "divergent" à partir des sources	$div(\vec{B}) = 0$
Théorème de Gauss: $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\vec{B}$ est à flux conservatif: $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
$\vec{rot}(\vec{E}) = \vec{0} \Rightarrow$ il existe $V$ tel que $\vec{E} = -\vec{grad}(V)$	$\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	Théorème d'Ampère $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlacé}$
Les lignes de champ de $\vec{E}$ ne sont pas fermées	

	Dipôle électrostatique	Dipôle magnétostatique
Moment dipolaire	$\vec{p} = qA_- A_+$ ou $\vec{p} = \iiint \rho(P) \vec{OP} d\tau$	$\vec{M} = i\vec{S}$ ou $\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint \vec{OP} \wedge \vec{j} d\tau$
Champ créé	$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos(\theta)}{r^3}$ , $E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin(\theta)}{r^3}$	$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos(\theta)}{r^3}$ , $B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \sin(\theta)}{r^3}$
soit:	$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p})$	$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{M} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{M})$
Action subie	couple $\vec{C} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$	couple $\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0$
Energie potentielle	$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$	$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0$



Attention les lignes de champ d'un dipôle électrostatique et d'un dipôle magnétique ne sont pas identiques à proximité des dipôles (les lignes de champ de  $\vec{B}$  sont fermées alors que celles de  $\vec{E}$  ne le sont pas). Les champs ci-dessus sont obtenus dans l'approximation dipolaire, à "grande" distance de la source