6. Electrostatique

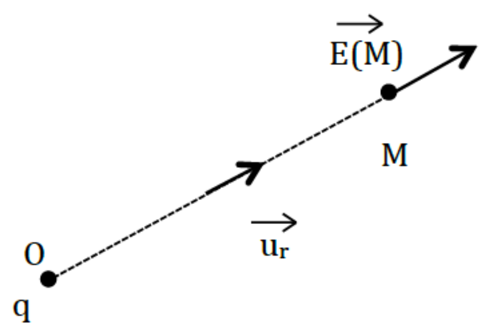
Charles-Augustin Coulomb (1736-1806) est un ingénieur et physicien français. Expérimentateur exceptionnel, il est à l'origine des lois du frottement, qu'il met en oeuvre dans les travaux réalisés à la Martinique, où il est envoyé en mission en 1761à sa sortie de l'École du génie de Mézières, puis à Cherbourg, Rochefort et Saint-Malo. Après la révolution, il devient inspecteur général de l'instruction publique, à la demande de Bonaparte. Il a réalisé des expériences historiques à l'aide d'une balance appelée “balance de Coulomb” pour déterminer la force qui s'exerce entre deux charges électriques. Membre de l'académie des sciences, il est l'auteur de sept traités sur l'électricité et le magnétisme.

I. Champ électrostatique. Potentiel

I.1. Cas de charges ponctuelles

- La force exercée sur une charge Q placée en M par une charge q, placée à l'origine des coordonnées (sphériques) est : $\overrightarrow{f} = Q\overrightarrow{E}(M)$, où $\overrightarrow{E}(M)$ est le champ électrostatique créé au point M :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u_r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$



La force $\overrightarrow{f}$ dérive d'une énergie potentielle : $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(QV) = -Q\overrightarrow{\text{grad}}V$, où le potentiel électrostatique $V(M)$ est défini par $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$.

En imposant que V$\rightarrow 0$ quand la distance $OM = r \rightarrow \infty$:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

- Lorsqu'il y a plusieurs charges q_i, placées aux points P_i , il y a superposition et :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\frac{\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3}$$

L e potentiel en M est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{P_iM}$$

I.2. Distributions continues

Pour une distribution volumique de charge de densité volumique de charge ρ (en C.m^{-3}) :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \rho d\tau \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \text{ et } V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho d\tau}{PM}$$

Pour une distribution surfacique de charge de densité volumique de charge σ (en C.m^{-2}) :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \sigma dS \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \text{ et } V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{PM}$$

Pour une distribution volumique de charge de densité volumique de charge λ (en C.m^{-1}) :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \lambda d\ell \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} \text{ et } V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\lambda d\ell}{PM}$$

II. Propriétés du champ électrostatique

II.1. Circulation de $\overrightarrow{E}$

Le potentiel électrostatique V est tel que :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\overrightarrow{\nabla V}$$

Cela implique :

- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow$ Pour tout contour fermé orienté C et toute surface S s'appuyant sur ce contour: $\oint_C \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}).\overrightarrow{dS} = 0$
- $\oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = 0 \Rightarrow$ Les lignes de champ de $\overrightarrow{E}$ ne sont pas fermées
- $V(A) - V(B) = \int_A^B \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} \Longrightarrow$ Les lignes de champ de $\overrightarrow{E}$ sont normales aux surfaces équipotentielles $V = Cte$. Elles sont orientées vers les potentiels décroissants.

II.2. Flux de $\overrightarrow{E}$

Théorème de Gauss (admis) : Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge intérieure à cette surface divisé par ε_0.

$$\text{Pour toute surface fermée } S \text{ , } \oiint_S \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Qint}{\varepsilon_0}$$

Cela implique :

- $div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. C'est l'équation de Maxwell-Gauss. Les lignes de champ divergent à partir (ou convergent vers) leur source, qui est constituée des charges électriques.
- Dans une région vide de charge, le champ électrostatique est à flux conservatif et donc les lignes de champ de $\overrightarrow{E}$ se resserrent quand $\left\|\overrightarrow{E}\right\|$ augmente.

II.3. Symétries des distributions de charges et du champ électrostatique

En général, les éléments de symétrie des causes se retrouvent dans les effets produits.C'est le principe de Curie. En électrostatique, les sources du champ sont les distributions de charge. Les effets associés sont les forces qui s'exercent sur des particules chargées (charge Q) $\overrightarrow{f} = Q\overrightarrow{E}$

Symétrie et antisymétrie dans les distributions de charge

Pour un point M de l'espace, on définit M', symétrique de M par rapport à un plan P.

Le plan P est un plan de symétrie de la distribution de charges si pour tout M, $\rho(M) = \rho(M')$

Le plan P* est un plan d'antisymétrie de la distribution de charges si pour tout M, $\rho(M) = -\rho(M')$

Symétries des champs électrostatiques

Soit D une distribution de charges, soit T une transformation de l'espace (translation, rotation, symétrie...)

$$\left.\begin{array}{c} T(D) = D \\ M' = T(M) \end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{E(M')} = T(\overrightarrow{E(M)})$$

$$\text{Si } \ M = T(M) \qquad \overrightarrow{E(M)} = T(\overrightarrow{E(M)})$$

Conséquences:

- Si T est une translation, rotation, symétrie laissant D invariante: $\left\|\overrightarrow{E(T(M))}\right\| = \left\|\overrightarrow{E(M)}\right\|$
- En un point M d'un plan de symétrie P d'une distribution de charge, le champ $\overrightarrow{E(M)}$ est contenu dans le plan P.
- En un point M d'un plan d'antisymétrie P' d'une distribution de charge, le champ $\overrightarrow{E(M)}$ est perpendiculaire au plan P'.

$\overrightarrow{E}$ est un vecteur polaire, ou un "vrai" vecteur.

Application: détermination des paramètres d'espace dont dépend $\left\|\overrightarrow{E(M)}\right\|$, et de la direction de $\overrightarrow{E(M)}$.

II.4. Application à la détermination des champs électrostatiques

- Les lignes de champ de $\overrightarrow{E}$, orientées dans le sens du champ, ne sont pas fermées. Elles présentent les mêmes symétries et invariances que la distribution de charge. Elles partent des zones de l'espace chargées positivement et aboutissent dans des régions chargées négativement. Les lignes de champ sont normales aux surfaces équipotentielles et orientées vers les potentiels décroissants.
- Pour appliquer le théorème de Gauss (réservé aux distributions très symétriques), la démarche obligatoire est:

  -détermination des paramètres d'espace dont dépend la norme du champ

  -détermination de la direction du champ en tout point de l'espace

  -choix d'une surface fermée telle qu'en tout point le champ $\overrightarrow{E}$ est soit normal ou tangent à la surface

  -application du théorème

À savoir faire: Champs créés par une boule chargée avec une distribution volumique de charge uniforme, cylindre uniformément chargé, plan infini uniformément chargé...Savoir que le champ électrique créé à l'extérieur d'une distribution de charge à symétrie sphérique de centre O, est identique au champ créé par une charge ponctuelle égale à la charge totale et placée en O.

- Retenir l'application à la détermination de la capacité d'un condensateur plan modélisé par deux plans "infinis" uniformément chargés parallèles distants de e portant des charges opposées: $\overrightarrow{E}=\overrightarrow{E_1}+\overrightarrow{E_2}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\overrightarrow{u} \Rightarrow Q_1 = C(V_1 - V_2) = \frac{\varepsilon_0 S}{e}(V_1 - V_2)$

III. Les lois locales de l'électrostatique

- Pour le champ électrostatique seul :

Équation de Maxwell-Gauss: $div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho.d\tau$

Équation de Maxwell-Faraday: $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0} \iff \oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = 0$

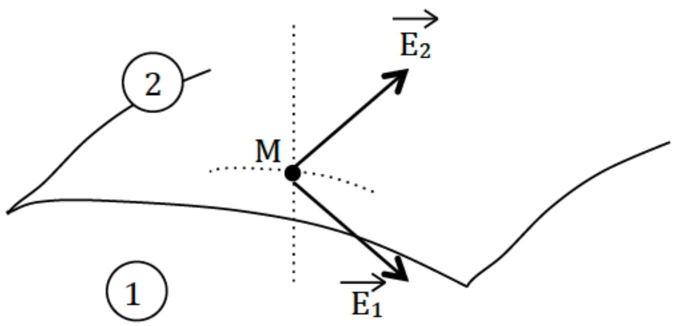
- Pour le potentiel :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\overrightarrow{\nabla V}$$

$$\text{Équation de Poisson : } \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Dans une région vide de charge, l'équation de Poisson devient l'équation de Laplace $\Delta V = 0$

IV. Discontinuité du champ électrique à la traversée d'une surface chargée



$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}_{12}$$

V. Énergie électrostatique

Pour une charge ponctuelle placée en présence d'un champ électrique extérieur $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E_0} = -\overrightarrow{grad}(qV_0)$, d'où l'énergie potentielle (à une cte près):

$$E_p = qV_0$$

Pour deux charges en interaction : $E_p = q_1V_{2\to 1} = q_2V_{2\to 1} = \frac{1}{2}(q_1V_{2\to 1} + q_2V_{1\to 2})$

Plus généralement l'énergie électrostatique est (admis, voir cours sur les équations de Maxwell) :

$$U_{él} = \iiint_{espace} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.d\tau$$

VI. Dipôle électrostatique

- Définition: ensemble de deux charges $+q$ et $-q$ situées en A^+ et A^- à une distance a l'une de l'autre. Dans l'approximation dipolaire, cette distance a est petite devant les autres grandeurs caractéristiques du système. Exemple : molécules polaires HCl,H_2O. Le moment dipolaire

$$\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{A^-A^+}$$

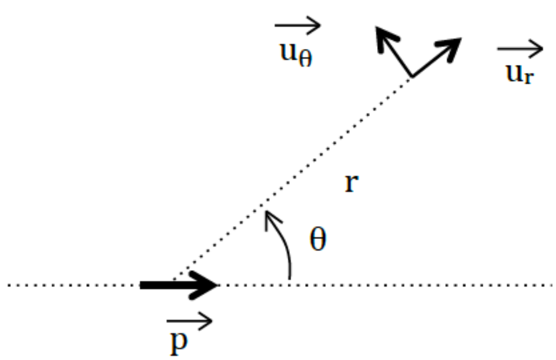
Remarque : Le moment dipolaire d'une distribution de charges q_i placées en des points A_i, de charge totale $\sum_i q_i$ nulle, localisée dans une région de l'espace dont l'extension maximale est d, est par extension $\overrightarrow{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OA_i}$. Lors du calcul du potentiel et du champ en un point situé à grande distance $r \gg d$, les expressions qui suivent du potentiel et du champ correspondent au développement au premier ordre en r/d de ces grandeurs.

- Potentiel et champ créés par un dipôle

Capacité exigible: Établir le potentiel créé par le dipôle en un point M situé à une distance $r >> a$ du milieu O de A^+ et A^-:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{p}.\overrightarrow{u_r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos(\theta)}{r^2}$$

en coordonnées sphériques, le dipôle donnant la direction et le sens de l'axe (Oz).



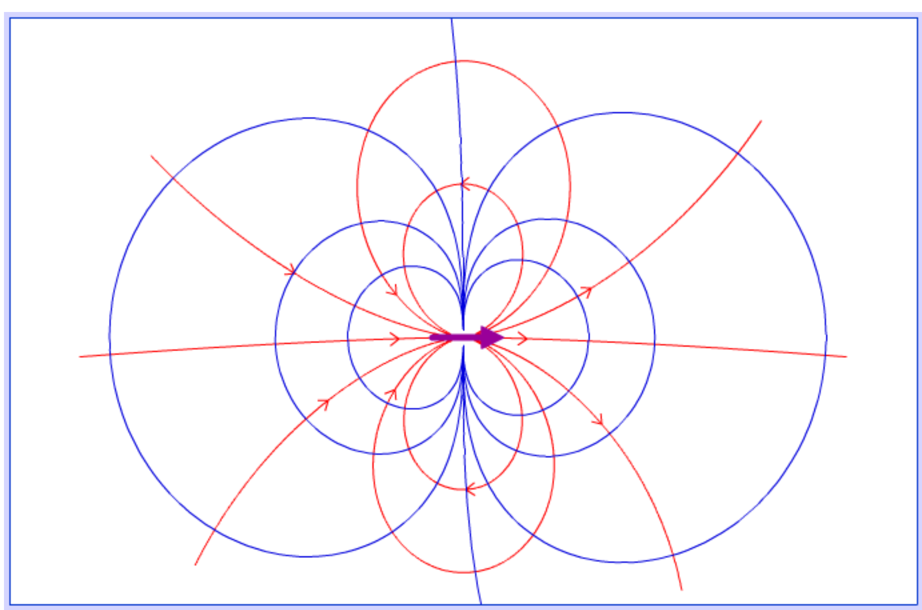
On en déduit le champ : $$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos(\theta)}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin(\theta)}{r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$

ou encore sous forme condensée :

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3(\overrightarrow{p}.\overrightarrow{u_r})\overrightarrow{u_r} - \overrightarrow{p})$$



En bleu : les équipotentielles. En rouge : les lignes de champ.

- Actions subies en présence d'un champ $\overrightarrow{E_0}$ extérieur

On est dans l'approximation dipolaire: l'extension du dipôle est faible devant les distances caractéristiques de variation de $\overrightarrow{E_0}$.

$$\text{résultante} \quad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \text{ si le champ } \overrightarrow{E_0} \text{ est uniforme}$$

$$\text{couple} \quad \overrightarrow{C} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E_0}$$

$$\text{énergie potentielle } E_p = -\overrightarrow{p}.\overrightarrow{E_0}$$

L'expression de E_p montre que le dipôle tend à s'aligner avec le champ et à se déplacer vers les zones de champ intense. Si le champ n'est pas uniforme, la force résultante est : $\overrightarrow{R} = (\overrightarrow{p}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{E}$

VII. Analogie Électrostatique-Gravitation

Electrostatique
Force exercée sur q_1 par q_2: $\overrightarrow{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{u_{12}}$

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge intérieure à cette surface divisée par ε_0.
$\oiint_S \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Gravitation
Force exercée sur m_1 par m_2: $\overrightarrow{f} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{u_{12}}$

Le flux du champ gravitationnel à travers une surface fermée est égal à la masse intérieure à cette surface multipliée par −
$\oiint_S \overrightarrow{g}.\overrightarrow{dS} = -4\pi G M_{int}$

Ordes de grandeur

- Champs électriques

- Champ à la surface de la Terre: quelques centaines de V.m^{-1}
- Champ disruptif de l'air: 10^6V.m^{-1}

- Dipôles électriques microscopiques: unité adaptée le Debye; 1D=$\frac{1}{3}10^{-29}$C.m

- Molécule d'eau: p=1,83D