

Statique des fluides. Loi de Boltzmann et généralisation



Ludwig Boltzmann (1844-1906), physicien autrichien, soutient sa thèse sur la théorie cinétique des gaz sous la direction de Stefan, en décrivant le gaz par le comportement statistique de ses constituants. Il travaille sur la nature statistique de l'entropie, et fait jouer un rôle fondamental au théorème de l'équipartition dans la physique statistique et la thermodynamique. Il se suicide en 1906, avant que ses idées ne rencontrent un succès éclatant avec l'explication du rayonnement du corps noir par Planck, et celle de l'effet photoélectrique par Einstein.

I. Statique des fluides

1. Définitions

Un fluide est un milieu continu déformable. Loin du point critique, les ordres de grandeur pour les masses volumiques des gaz et liquides sont très différents:

$$\begin{array}{ll} \text{Air à } 20^\circ\text{C, } P=1\text{bar} & \mu = 1,3 \text{ kg.m}^{-3} \\ \text{Eau} & \mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \end{array}$$

La **densité** est un nombre sans dimension. Pour les liquides, la référence est l'eau

$$d = \frac{\mu}{\mu_{\text{eau}}} = \frac{\mu(\text{en kg.m}^{-3})}{10^3}$$

Pour les gaz, la référence est l'air. En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, la densité est le rapport des masses molaires. La masse molaire moyenne de l'air est 29g/mol. D'où

$$d = \frac{M}{M_{\text{air}}} = \frac{M(\text{en g/mol})}{29}$$

Le **coefficient de compressibilité** (soit isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$, soit isentropique $\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$) d'un fluide est très différent pour un gaz et un liquide:

$$\begin{array}{ll} \text{Eau} & \chi_T \simeq 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} \\ \text{Air} & \chi_T \simeq 10^{-5} \text{ Pa}^{-1} \end{array}$$

Les liquides sont souvent considérés comme des fluides incompressibles (masse volumique indépendante de la pression)

2. Pression dans un fluide

2.a. Force de pression

Un élément de fluide en contact avec le reste du fluide par une surface S subit en chaque partie infinitésimale dS de S une force de la part du fluide qui l'entoure:

$$\vec{dF} = p(M) \cdot \vec{dS}$$

où $p(M) > 0$ est la pression en M et \vec{dS} est le vecteur normal à la surface, d'aire dS orientée vers l'élément de fluide considéré.

La pression a pour unité S.I. le Pascal (1 Pa = 1 N.m⁻²).

2.b. Force volumique de pression

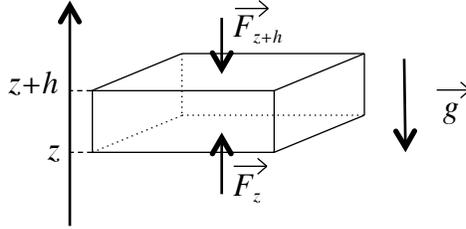


FIGURE 1 : Équilibre d'une "tranche" de fluide

On étudie le cas d'un fluide dans lequel la pression ne dépend que de la coordonnée z .

Considérons le cas d'une tranche de fluide de section Σ dans le plan (xy) et comprise entre z et $z+h$.

En z s'exerce la force due au fluide situé sous la tranche $\vec{F}_z = P(z)S\vec{u}_z$ et en $z+h$ s'exerce la force due au fluide situé au-dessus $\vec{F}_{z+h} = -P(z+h)S\vec{u}_z$. Les forces de pression latérales se compensent.

La résultante des forces de pression est:

$$\vec{F}_P = P(z)S\vec{u}_z - P(z+h)S\vec{u}_z$$

Pour h suffisamment petit, un développement limité à l'ordre un fournit $P(z+h) \simeq P(z) + h\frac{dP}{dz}(z)$. D'où

$$\vec{F}_P = -\Sigma h \frac{dP}{dz} \vec{u}_z$$

Σh représente le volume de la tranche. Pour une tranche de dimensions infinitésimales dx, dy, dz , on obtient la force infinitésimale:

$$d\vec{F}_P = -\frac{dP}{dz} dx dy dz \vec{u}_z = -\frac{dP}{dz} d\tau \vec{u}_z$$

En généralisant à une pression $p(x, y, z)$, on obtient:

$$d\vec{F}_P = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) d\tau$$

On définit la force volumique de pression \vec{f}_p

$$d\vec{F} = \vec{f}_p d\tau = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) d\tau$$

La résultante des forces de pression s'exerçant sur un volume V limité par une surface fermée S est:

$$\vec{F} = -\oint_S p(M) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (-\overrightarrow{\text{grad}}(p)) \cdot d\tau$$

3. Loi de la statique des fluides (ou de l'hydrostatique)

3.a. Énoncé

Les actions exercées sur un fluide vont souvent pouvoir être exprimées en termes de forces volumiques \vec{f}_V telle que la force exercée sur un élément de volume $d\tau$ est $d\vec{F} = \vec{f}_V \cdot d\tau$

Exemples : Poids d'un élément de volume $d\tau$: $d\vec{P} = \mu \vec{g} \cdot d\tau$ où μ est la masse volumique, la force magnétique $d\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$, la force d'inertie d'entraînement $d\vec{F}_{ie} = -\mu \vec{a}_e d\tau$

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen où le fluide est au repos, la loi de l'hydrostatique (en tout point) exprime que la somme des forces est nulle:

$$\sum_{\text{autres}} \vec{f}_V - \overrightarrow{\text{grad}}(p) = \vec{0}$$

la somme portant sur toutes les forces volumiques autres que la force de pression

Dans le cas où la seule autre force est le poids $\mu \vec{g} = -\mu g \vec{u}_z$

$$-\mu g = \frac{dp}{dz} \quad (\text{axe } z \text{ ascendant})$$

3.b. Quelques conséquences

-La pression atmosphérique diminue avec l'altitude, la pression dans la mer augmente avec la profondeur.

-Pour un gaz occupant un volume "pas trop grand", on parle de LA pression du gaz car la variation avec l'altitude est négligeable en raison de la faible masse volumique.

-Les isobares sont des surfaces telles que $\vec{\text{grad}}(p)$ est normal à ces surfaces (analogie champ électrique normal aux surfaces équipotentielles). On en déduit que la surface libre d'un liquide au repos dans le référentiel terrestre galiléen est horizontale.

3.c. Cas des liquides incompressibles en référentiel terrestre galiléen Si de plus le fluide est incompressible:

$$p_A - p_B = \mu g(z_B - z_A)$$

La pression en un point d'un liquide incompressible ne dépend que de son altitude.

Poussée d'Archimède La pression diminue avec l'altitude. On conçoit donc que la résultante des forces de pression exercées sur un objet est dirigée selon la verticale ascendante. Plus précisément:

Soit un objet immergé totalement ou non dans un fluide, le volume immergé étant V . Pour déterminer la résultante des forces de pression, imaginons qu'à la place de l'objet se trouve le même volume V de fluide. Ce volume de fluide serait soumis à la même résultante des forces de pression que le solide initial (cette force est due à l'action du reste du fluide). Ce volume de fluide serait donc en équilibre sous l'action des forces de pression et de son poids. La somme de ces deux actions (résultante et moment) étant nulle, on en déduit que la résultante de forces de pression est l'opposée du poids du volume V de fluide et que le moment par rapport au centre d'inertie du volume de fluide V est nul:

Tout corps immergé dans un fluide subit de la part de celui-ci une force verticale ascendante dont la norme est égale au poids du fluide déplacé et appliquée au centre d'inertie du volume de fluide déplacé.

Le centre d'inertie du volume de fluide est appelé le centre de poussée. Il n'est en général pas confondu avec le centre de masse de l'objet. En ce qui concerne le moment de la poussée d'Archimède, on se passe comme si la poussée d'Archimède s'appliquait au centre de poussée. (Conséquences sur la stabilité d'un navire: que pensez-vous du comportement d'un quillard et d'un catamaran vis à vis de la gîte?)

Ordres de grandeur :

- Pression atmosphérique usuelle: 1013 hPa
- En plongée sous-marine, quand on descend de 10m, la pression augmente d'environ 1 bar=10⁵Pa
- Hauteur de mercure dans un baromètre de type Torricelli pour une pression atmosphérique de 1013 hPa: h=76 cm

II. Loi de Boltzmann

II.1. Modèle de l'atmosphère isotherme

Nous étudions l'atmosphère, assimilée à un gaz parfait. L'atmosphère est en équilibre isotherme : en chaque point M , la température $T(M, t) = T_0$ ne dépend ni de la position, ni du temps.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, l'axe z est choisi selon la verticale ascendante, et nous étudions une tranche d'atmosphère d'aire S , comprise entre z et $z + h$. Nous supposons que la pression et la densité particulière $n^*(z)$ ne sont fonctions que de z . L'épaisseur h est suffisamment petite pour que $n^*(z)$ varie peu dans la tranche, qui contient $n^*(z)Sh$ molécules.

Avec la même démarche qu'en I.2b, l'équilibre mécanique de la tranche s'écrit :

$$n^*(z)Shm\vec{g} + P(z)S\vec{u}_z - P(z+h)S\vec{u}_z = \vec{0}.$$

Un développement limité à l'ordre un fournit $P(z+h) \simeq P(z) + h\frac{dP}{dz}(z)$. D'où,

$$\frac{dP}{dz} = -n^*(z)mg.$$

On retrouve ici simplement la loi locale de l'hydrostatique $\frac{dP}{dz} = -\mu g$, où $\mu = n^*(z)m$ est la masse volumique de l'air, qui dépend de z .

Le nombre de moles¹ par unité de volume est $\frac{n^*(z)}{N_A}$. L'équation d'état du gaz parfait donne :

$$P(z) = \frac{n^*(z)}{N_A}RT.$$

On en déduit que $n^*(z)$ obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dn^*}{dz} + \frac{mg}{k_B T}n^*(z) = 0,$$

où $k_B = \frac{R}{N_A}$ est la constante de Boltzmann de valeur numérique $k_B = 1,38.10^{-23} J.K^{-1}$. D'où :

$$n^*(z) = n^*(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \text{ et } P(z) = P(0)e^{-\frac{mgz}{k_B T}}.$$

La densité particulière, comme la pression, décroissent exponentiellement avec l'altitude selon $\exp(-z/H)$ où la distance $H = \frac{k_B T}{mg}$. Numériquement $\frac{k_B}{m} = \frac{R}{M}$ où la masse molaire moyenne $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$; avec $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.K^{-1}$, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ et $T = 273 \text{ K}$, on obtient $H = 8,0 \text{ km}$.

II.2. Facteur de Boltzmann

L'énergie potentielle de pesanteur d'une molécule de masse m à l'altitude z est : $\varepsilon = mgz$. Dans le système constitué par l'atmosphère en équilibre thermique à la température T , la relation $n^*(z) = n^*(0) \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$ indique que le nombre de particules d'énergie potentielle ε est proportionnel à $\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$. Pour une molécule donnée, la probabilité d'avoir une énergie potentielle ε est donc proportionnelle à $\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$. Ce terme est appelé facteur de Boltzmann. Plus précisément, la probabilité pour une molécule atmosphérique de se trouver entre z et $z + dz$ est

$$dp(z) = Ae^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} dz.$$

La constante de normalisation A est obtenue en exprimant $\int_0^\infty dp(z) = 1$. Nous avons $\int_0^\infty dp(z) = -A\frac{k_B T}{mg} \left[e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \right]_0^\infty = A\frac{k_B T}{mg}$. D'où $A = \frac{mg}{k_B T}$ qui s'exprime en m^{-1} , la probabilité étant sans dimension.

L'énergie $k_B T$ qui intervient dans la loi de distribution est très petite. À 273 K, elle a pour valeur $3,8.10^{-21} \text{ J}$, soit $0,023 \text{ eV}$. On peut retenir qu'à 300K, $k_B T$ est de l'ordre de $1/40 \text{ eV}$.

II.3. Généralisation du facteur de Boltzmann

Loi de Boltzmann Nous nous limitons dans le cadre du programme aux cas de systèmes dont la température T est fixée par contact thermique avec un thermostat. Un thermostat est un dispositif qui peut fournir ou céder de l'énergie tout en gardant une température constante. Pratiquement, cela correspond à un système de très grande capacité thermique. Nous admettons la loi de Boltzmann :

¹Attention $n^*(z)$ est le nombre de molécules par unité de volume et non un nombre de moles !

Pour un système en équilibre thermique avec un thermostat à la température T , la probabilité pour une particule de se trouver dans un état d'énergie ε est proportionnelle à $\exp[-\varepsilon/(k_B T)]$.

L'énergie ε est ici l'énergie totale et non seulement l'énergie potentielle.

Ainsi, dans le cas d'un système constitué de particules indépendantes pouvant se répartir dans des états de niveaux d'énergie discrets ε_i , la probabilité pour une molécule de se trouver dans le niveau d'énergie ε_i est

$$p_i = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_i}{k_B T}}}{\sum_j e^{-\frac{\varepsilon_j}{k_B T}}},$$

la sommation étant faite sur tous les états possibles.

Dans la suite, nous poserons pour alléger les notations $\beta = \frac{1}{k_B T}$. La probabilité p_i précédente s'exprime alors par :

$$p_i = \frac{e^{-\beta\varepsilon_i}}{\sum_j e^{-\beta\varepsilon_j}}.$$