Oscillateurs en mécanique et en électricité

1 Oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique libre est régi par une équation qui peut se mettre de la forme :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

La solution se met sous une des trois formes équivalentes (A, B, C, ψ, D, E étant des constantes à déterminer)

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t + \psi)$$

$$y(t) = D\exp(i\omega_0 t) + E\exp(-i\omega_0 t)$$

2 Oscillateur amorti

Un oscillateur amorti, fréquent en mécanique comme en électricité, est régi par une équation qui peut se mettre sous la forme canonique :

$$\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t)$$

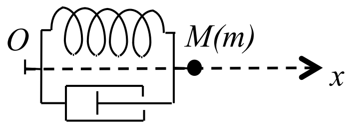
où $\omega_0 > 0$ est la pulsation propre, et $Q > 0$ est le facteur de qualité.

Remarque : le cas de l'oscillateur amplifié est plus rare, et se décrit de manière analogue.

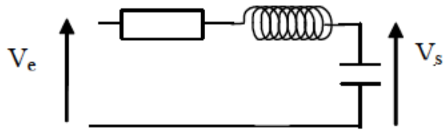
2.1 Régime libre $f(t) = 0$ ou réponse à une excitation constante $f(t) = C$

2.1.1 Exemples de régime libre

Mécanique : $y(t)$ est l'amplitude d'un oscillateur élastique amorti, par exemple un point matériel relié à un ressort amorti, dont l'autre extrémité est fixe.



Electricité : $y(t) = V_s(t)$ est la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC série alimenté par une tension V_e nulle ou constante.



$$\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

La solution est de la forme $y(t) = \lambda \exp(r_1 t) + \mu \exp(r_2 t)$, r_1 et r_2 étant les racines de l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$. Selon le signe du discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$, on distingue différents cas :

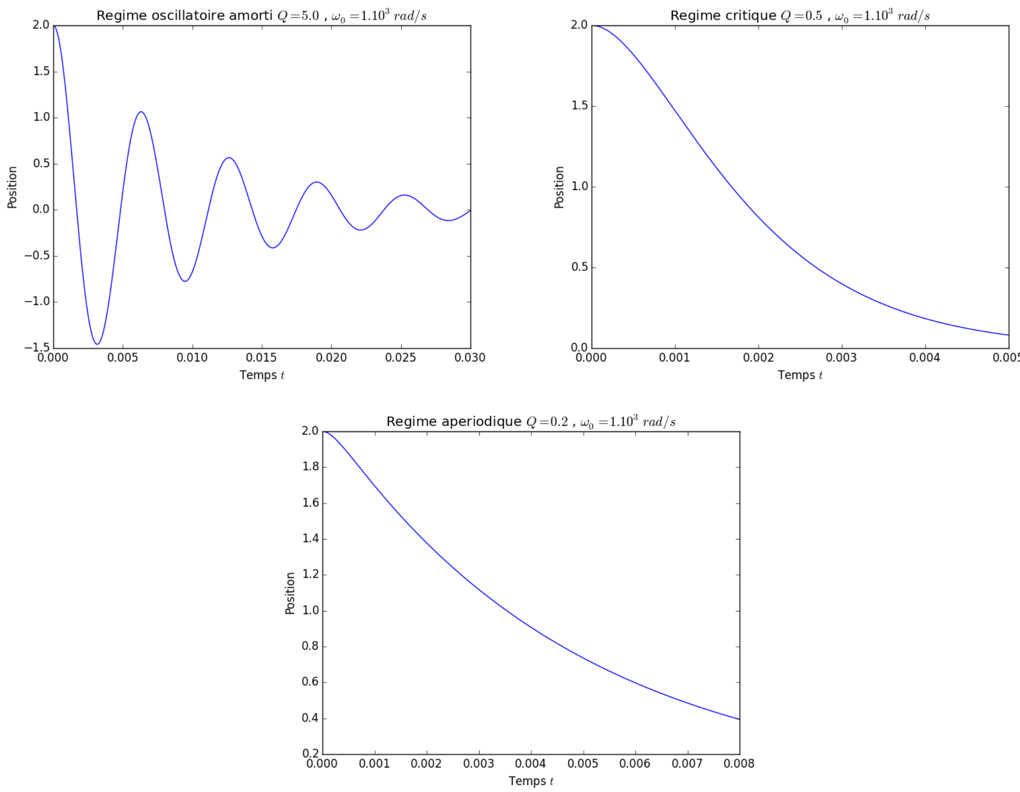


Figure 1 – Régime libre d'un oscillateur amorti pour différentes valeurs du facteur de qualité

— Pour $Q > \frac{1}{2}$, soit $\Delta < 0$. Les deux racines sont complexes et

$$y(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] \text{ avec } \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}, A \text{ et } B \text{ réels}$$

Il s'agit du régime pseudo-périodique de pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Pour un oscillateur faiblement amorti, $Q \gg 1$ et $\Omega \simeq \omega_0$.

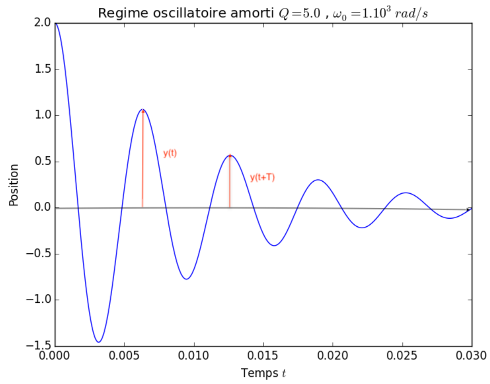


Figure 2 – Oscillations pseudo-périodiques : le décrément logarithmique est $\delta = \ln(y(t)/y(t+T))$.

— Pour $Q = \frac{1}{2}$, soit $\Delta = 0$. Il y a une racine (réelle) et

$$y(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[Ct + D]\,, C \text{ et } D \text{ réels}$$

C'est le régime critique. Ce régime est celui qui permet le retour vers l'équilibre $y = 0$ le plus rapide.

— Pour $Q < \frac{1}{2}$, soit $\Delta > 0$. Les deux racines sont réelles négatives et

$$y(t) = E\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right) + F\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right), E \text{ et } F \text{ réels}$$

2.2 Régime sinusoïdal forcé

$$\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = \alpha\cos(\omega t + \varphi)$$

La solution est la superposition de la solution générale l'équation homogène (qui s'amortit) et de la solution particulière de l'équation avec second membre, qui est une fonction sinusoïdale de même pulsation ω.

2.2.1 Exemples

Mécanique : amplitude d'un oscillateur élastique amorti , par exemple un point matériel relié à un ressort amorti, dont l'autre extrémité est animée d'un mouvement sinusoïdal.

Electricité : tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale.

2.2.2 Solution en régime forcé (ou permanent). Résonance

En utilisant la représentation complexe, telle que $y = Re(\underline{y})$ où $\underline{y} = Y_0 \exp i(\omega t + \psi) = \underline{Y_0}\exp(i\omega t)$

$$\underline{Y_0} = \frac{\alpha e^{i\varphi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega_0}{Q}\omega}$$

soit

$$Y_0 = \frac{|\alpha|}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2\right)^{1/2}} \text{ et } \psi = \varphi - \arctan\left(\frac{\omega_0\omega}{Q\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\right) \text{ pour } \alpha > 0$$

La résonance correspond à un maximum de l'amplitude Y_0 quand ω varie, soit à un minimum de $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2$. Il y a résonance pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a résonance pour $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. Pour $Q \gg 1, Y_{0,max} \simeq Q\frac{|\alpha|}{\omega_0^2}$.
- Pour $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, le maximum est obtenu pour $\omega = 0$.

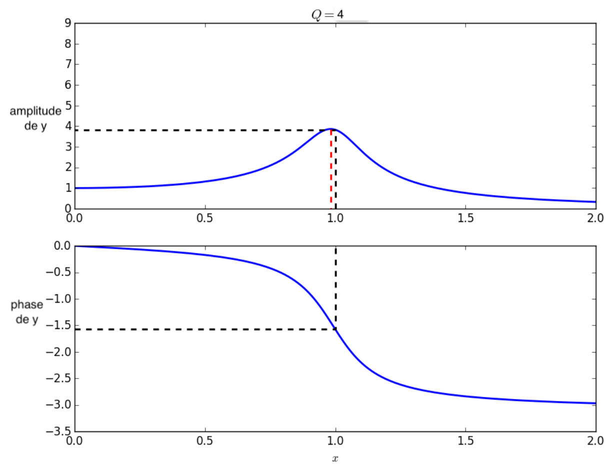


Figure 3 – Résonance en amplitude : amplitude de y et déphasage par rapport à l'excitation en fonction de $x = \omega/\omega_0$.

2.2.3 Résonance en $\dot{y}$

Dans les exemples donnés, c'est une résonance en vitesse de l'oscillateur mécanique, ou en intensité de l'oscillateur électrique

Posons $v = \dot{y}$, et $v = Re\left(\underline{v}\right)$ avec les notations précédentes où $\underline{v} = V_0 \exp i\left(\omega t + \theta\right) = \underline{V_0}\exp\left(i\omega t\right)$. Alors

$$\dot{v} + \frac{\omega_0}{Q}v + \omega_0^2\int v.dt = \alpha\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\underline{V_0} = \frac{\alpha e^{i\varphi}}{i\omega_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) + \frac{\omega_0}{Q}}$$

Soit

$$V_0 = \frac{|\alpha|}{\omega_0\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)^2\right)^{1/2}} \text{ et } \theta = \varphi - \arcsin\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}{\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}}$$

Il y a résonance pour $\omega = \omega_0$, pour tout Q, La bande passante, intervalle $\Delta\omega$ de pulsations telles que $\frac{V_0(\omega)}{V_{0,max}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ est $\Delta\omega = \frac{\omega}{Q}$.

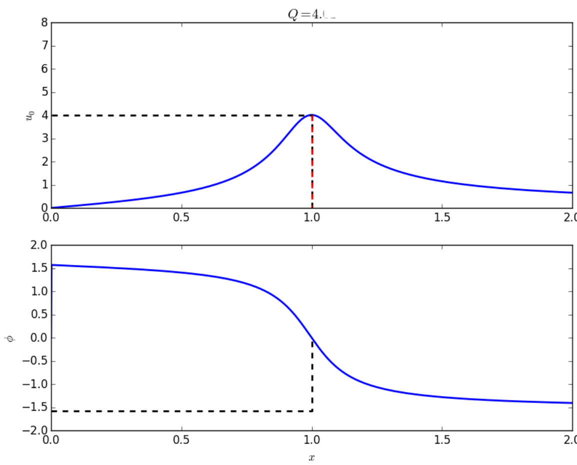


Figure 4 – Résonance en vitesse : amplitude de $v = \dot{y}$ et déphasage par rapport à l'excitation en fonction de $x = \omega/\omega_0$.

3 Aspect énergétique en mécanique

3.1 Oscillateur harmonique

L'énergie d'un oscillateur harmonique en régime libre se conserve au cours du temps.

Par ex. un oscillateur de masse m soumis à une force conservative $\overrightarrow{f} = -m\omega_0^2 y\overrightarrow{u_y}$ a une énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2 y^2$.

3.2 Oscillateur harmonique amorti en régime libre

L'énergie d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre décroît au cours du temps.

Par ex. un oscillateur de masse m soumis à

- une force conservative $\overrightarrow{f_1} = -m\omega_0^2 y\overrightarrow{u_y}$ dérivant d'une énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}m\omega_0^2 y^2$

- une force non conservative $\overrightarrow{f_2} = -m\frac{\omega_0}{Q}\dot{y}\overrightarrow{u_y}$

a pour énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 y^2$$

telle que $\frac{dE_m}{dt} = -m\frac{\omega_0}{Q}\dot{y}^2 < 0$.

Pour un régime pseudo-périodique, avec δ décrément logarithmique :

$$\ln\left(\frac{E_m(t)}{E_m(t+T)}\right) = 2\delta$$

4 Portraits de phase

4.1 Oscillateur harmonique.

Le portrait de phase $\dot{y} = f(y)$ d'un oscillateur harmonique est une ellipse centrée sur l'origine.

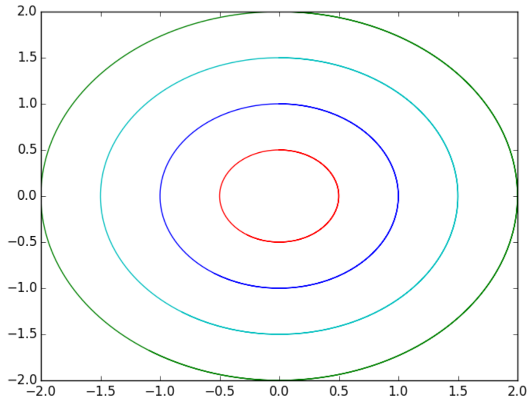


Figure 5 – Portrait de phase d'un oscillateur harmonique pour différentes conditions initiales.

4.2 Oscillateur harmonique amorti

En présence d'amortissement, la trajectoire converge vers le point fixe origine.

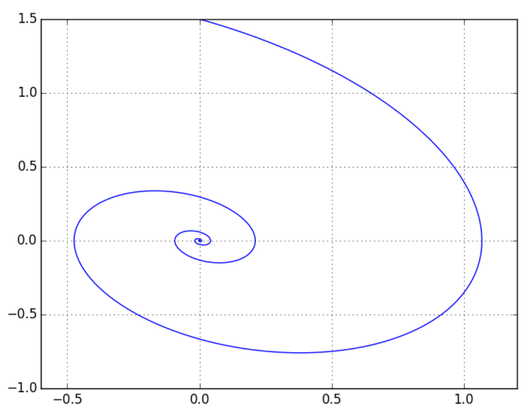


Figure 6 – Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti.