1. Les équations de Maxwell “dans le vide” sont : $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\mathrm{div}\overrightarrow{B} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$

L’ARQS consiste à négliger le temps de propagation des champs devant le temps caractéristique de leur évolution. L’ARQS est valide dans le cas général pour des temps caractéristiques d’évolution inférieur à 10^{-11} s schématiquement (cf cours 8). Les équations de Maxwell sont inchangées sauf l’équation de Maxwell-Ampère qui devient $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$.

2. Dans un conducteur ohmique $\rho = 0$ (on montre que $\rho \to 0$ avec un temps caractéristique $\tau = \varepsilon_0/\gamma$ de l’ordre de $10^{-19}s$ et $\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}$, le courant de dépacement étant négligeable devant le courant de conduction pour des champs dont le temps d’évolution est grand devant τ. Le modèle du conducteur ohmique n’étant de toutes façons pas valide pour des temps caractéristiques inférieur ou égaux à 10^{-14}s, ces conditions sont automatiquement remplies. On retrouve ainsi l’équation de Maxwell- Ampère de l’ARQS.

$\mathrm{div}\overrightarrow{E} = 0$ $\mathrm{div}\overrightarrow{B} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \gamma \overrightarrow{E}$

3. $\left\|\overrightarrow{E}\right\|$ ne dépend que de r, z par symétrie autour de l’axe des cylindres. Avec l’équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \left(\frac{\partial E_r}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$. Donc $\overrightarrow{B}$ est porté par $\overrightarrow{u_\theta}$ (en l’absence d’un champ indépendant du temps).

4. Par invariance par rotation autour de l’axe des cylindres $\left\|\overrightarrow{B}\right\|$ ne dépend que de r, z. Par application du théorème d’Ampère (ARQS) en utilisant un contour circulaire :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{\mu_0 i(z,t)}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$$

En représentation complexe $\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \frac{\mu_0 \underline{I_m}(z) e^{j\omega t}}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$

5. Avec l’équation locale de Maxwell-Ampère dans l’espace vide entre les deux cylindres, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$,

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \left(-\frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_z} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial z}\overrightarrow{u_r}$.

D’où $\overrightarrow{\underline{E}}(r,z,t) = -\frac{\underline{I'_m}(z) e^{j\omega t}}{j\omega 2\pi \varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$ en ne tenant pas compte de champ indépendant du temps.

Remarque : dans la formulation intégrale du théorème d’Ampère les deux termes (courant de déplacement et courant de conduction) sont présents, on néglige le courant de délacement. En revanche dans l’équation locale, on est dans le vide il n’y a pas de courant de déplacement.

6. Avec l’équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \left(\frac{\partial E_r}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{\underline{I"_m}(z) e^{j\omega t}}{j\omega 2\pi \varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{j\omega \mu_0 \underline{I_m}(z) e^{j\omega t}}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$, d’où :

$$\underline{I"_m}(z) = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \underline{I_m}(z)$$

et $k = \frac{\omega}{c}$.

On obtient donc pour les champs : $\overrightarrow{\underline{E}}(r,z,t) = \frac{I_0 e^{j(\omega t - kz)}}{c 2\pi \varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$

et $\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \frac{\mu_0 I_0 e^{j(\omega t - kz)}}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$

On a donc une onde progressive monochromatique se propageant dans le sens des z croissants, non plane, mais vérifiant néanmoins la relation de structure $\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \frac{\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{\underline{E}}(M,t)}{c}$.

8. $P(t) = \iint_S \overrightarrow{\Pi}.\overrightarrow{d^2S} = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \Pi r dr$

$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = \frac{I_0^2}{c\varepsilon_0 (2\pi r)^2} \cos^2(\omega t - kz) \overrightarrow{u_z}$

D'où la valeur moyenne (homogène)

$$P = \frac{I_0^2}{c4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$