1.a. Déterminons la direction du champ électrique : il y a invariance de la distribution de charge par symétrie par rapport à tout plan contenant O, centre de la sphère, et M , point où on cherche le champ. Le champ $\overrightarrow{E}(M)$ est donc porté par tous ces plans, donc par leur intersection , il est radial $\overrightarrow{E}(M) = E(M)\overrightarrow{u_r}$.

Déterminons les paramètres d'espace dont dépend $E(M)$: le système de coordonnées adaptée au problème est a priori celui des coordonnées sphériques r, θ, φ ; il y a invariance par rotation d'angle quelconque θ ou φ. Donc $E(M)$ ne dépend que de r , $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{u_r}$.

Appliquons le théorème de Gauss en utilisant comme surface fermée la sphère de centre O passant par M :

$\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S} = \oiint \overrightarrow{E}.d^2S\overrightarrow{u_r} = E(r).4\pi r^2$

$Q_{int} = \rho\left[\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\alpha R\right)^3\right]$

$\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow$

$$\overrightarrow{E}(M) = \rho\frac{R^3\left(1-\alpha^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

1.b. Les arguments de symétrie et d'invariance, ainsi que le choix de la surface sont inchangés. Un raisonnement analogue donne

$$\overrightarrow{E}(M) = \rho\frac{\left(r^3-\alpha^3R^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Remarque : de même il apparaît que le champ est nul pour $r < \alpha R$.

1.c. $U_{el} = \iiint_{toutl'espace}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d^3\tau = \int_0^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr = \int_{\alpha R}^R \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\rho\frac{\left(r^3-\alpha^3R^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}\right]^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\rho\frac{R^3\left(1-\alpha^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}\right]^2 4\pi r^2 dr$

1.d. $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ devient ici $E(r) = -\frac{dV}{dr}$.

D'où pour $r > R$, $V(r) = \rho\frac{R^3\left(1-\alpha^3\right)}{3\varepsilon_0 r}$.

Pour $\alpha R \leq r \leq R$, $V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[-\frac{r^2}{2} - \frac{\alpha^3R^3}{r}\right] + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$. La constante est déterminée par continuité du potentiel (car la distribution est volumique)

Pour $r \leq \alpha R$, le potentiel est constant et par continuité $V(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(1-\alpha^2\right) = V(0)$.

2. La charge portée par les deux distributions sont identiques. Donc $\sigma 4\pi R^2 = \rho\frac{4\pi R^3\left(1-\alpha^3\right)}{3} \simeq \rho\frac{4\pi R^3(1-\alpha)\left(1+\alpha+\alpha^2\right)}{3} \simeq \rho 4\pi R^3\left(1-\alpha\right)$.

$$\sigma = \rho R\left(1-\alpha\right)$$

3. On attend un potentiel continu pour une distribution surfacique. On le vérifie ici.

$V(R) - V(0) = \rho\frac{R^2\left(1-\alpha^3\right)}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(1-\alpha^2\right) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\left[\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3} - \frac{1+\alpha}{2}\right] = \frac{\sigma R}{6\varepsilon_0}\left(2\alpha^2 - 1 - \alpha\right)$

$V(R) - V(0) \simeq \frac{\sigma R}{6\varepsilon_0}\left[2\left(1+2\left(\alpha-1\right)\right) - 1 - \alpha\right] = \frac{\sigma R}{6\varepsilon_0}\left(\alpha - 1\right)$ qui tend bien vers 0 quand $\alpha \to 1$.