Une étoile sphérique de rayon R, à symétrie sphérique est constituée d'un fluide au repos de pression $P(r)$, de masse volumique $\rho(r)$. Le champ de gravitation à l'intérieur de l'étoile est $\overrightarrow{g}(r)$. L'équation d'état du fluide est :

$$p(r) = \frac{1}{2} k \rho^2(r)$$

1. Exprimer la condition d'équilibre pour un élément de fluide situé à la distance r du centre de l'étoile (on pourra utiliser la généralisation à 3 dimensions de l'expression de la force volumique de pression, démontrée dans le cours pour une dimension)

2. Par analogie avec l'électrostatique, exprimer l'équation de Poisson satisfaite par le potentiel de gravitation V tel que $\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{grad}(\mathrm{V})$. Montrer que $\rho(r)$ vérifie l'équation :

$$k \frac{d^2}{dr^2}(r\rho(r)) = -4\pi \mathscr{G} r \rho(r)$$

Pour une fonction $f(r)$, le laplacien en coordonnées sphériques est $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r f(r))$

3. Déterminer $\rho(r)$ avec les conditions aux limites : $\rho(0) = \rho_0$ et $\rho(R) = 0$. En déduire que le rayon de l'étoile ne dépend pas de sa masse.

4. Exprimer le champ gravitationnel au centre et à la surface de l'étoile.