1. Dans le référentiel dans lequel l'étoile est fixe, un élément de fluide $d^3\tau$ est en équilibre sous l'action de la force gravitationnelle $\rho\overrightarrow{g}d^3\tau$ et de la force résultante de pression $-\overrightarrow{\text{grad}}pd^3\tau$ (expression à savoir démontrer dans la cas 1D en coordonnées cartésiennes). En passant aux forces volumiques :

$$\rho\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\text{grad}}\, p$$

Avec l'équation d'état : $\overrightarrow{\text{grad}}\, p = k\rho\frac{d\rho}{dr}\overrightarrow{u_r}$, d'où $\rho\overrightarrow{g} = k\rho\frac{d\rho}{dr}\overrightarrow{u_r}$.

2. L'analogue de la densité volumique de charge est la masse volumique et l'analogue de ε_0 est $-4\pi\mathscr{G}$, donc $\Delta V - 4\pi\mathscr{G}\rho = 0$.

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rV(r)) - 4\pi\mathscr{G}\rho = 0 \tag{1}$$

.

$\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{grad}(V)$. Or avec la question 1, $\overrightarrow{g} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}\, p = k\frac{d\rho}{dr}\overrightarrow{u_r}$, donc $V(r) = -k\rho(r) + Cte$. En remplaçant dans (1), on trouve bien l'équation demandée.

3. On résout l'équation en $r\rho(r)$ qui est de type oscillateur harmonique :

$$r\rho(r) = A\sin\left(\sqrt{\frac{4\pi\mathscr{G}}{k}}r\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{4\pi\mathscr{G}}{k}}r\right)$$

4. Avec les CL en 0, $B = 0$ et $A\sqrt{\frac{4\pi\mathscr{G}}{k}} = \rho_0$, soit $\rho(r) = \frac{\rho_0}{r\sqrt{\frac{4\pi\mathscr{G}}{k}}}\sin\left(\sqrt{\frac{4\pi\mathscr{G}}{k}}r\right)$.

Avec la CL en R, on a nécessairement : $\sqrt{\frac{4\pi\mathscr{G}}{k}}R = n\pi$, n entier. Par ailleurs la masse volumique ne peut pas être négative, donc $n = 1$ et le rayon est bien indépendant de la masse :

$$R = \sqrt{\frac{\pi k}{4\mathscr{G}}}$$

et $\rho(r) = \frac{\rho_0 R}{r\pi}\sin\left(\pi\frac{r}{R}\right)$

5. Tout plan passant par le centre de l'étoile est plan de symétrie de la distribution de masse, donc le champ de gravitaion en O appartient à tous ces plans, il est donc nul.

À la surface $\overrightarrow{g} = k\frac{d\rho}{dr}\overrightarrow{u_r} = k\rho_0\left[\frac{R}{R\pi}\frac{\pi}{R}\cos(\pi)\right]\overrightarrow{u_r} = -\frac{k\rho_0}{R}\overrightarrow{u_r}$