Plaçons nous dans le plan contenant le tunnel et le centre de la Terre. Soit $(x'x)$ l'axe du tunnel.

On se place dans le référentiel lié à la Terre et supposé galiléen.

L'objet est soumis :

- à l'attraction gravitationnelle $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$

- à la réaction du tunnel $\overrightarrow{R}$ normale à $(x'x)$.

Déterminons le champ gravitationnel terrestre à l'intérieur de la Terre en supposant que le tunnel ne perturbe pas notablement ce champ. Etant donné la symétrie du problème, on utilise les coordonnées sphériques r, θ, φ.

- Tout plan contenant le centre de masse de la Terre O et un point M quelconque est plan de symétrie de la distribution de masse ; donc le champ gravitationnel est porté par l'intersection de ces plans $\overrightarrow{g}(M) = g(M)\overrightarrow{u_r}$

- Il y a invariance de la distribution de masse par rotation quelconque autour de O, donc $g(M) = g(r)$

- Appliquons le théorème de Gauss pour la gravitation en utilisant comme surface fermée une sphère de centre O, de rayon $r < R$: $\oiint \overrightarrow{g}.\overrightarrow{d^2S} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$

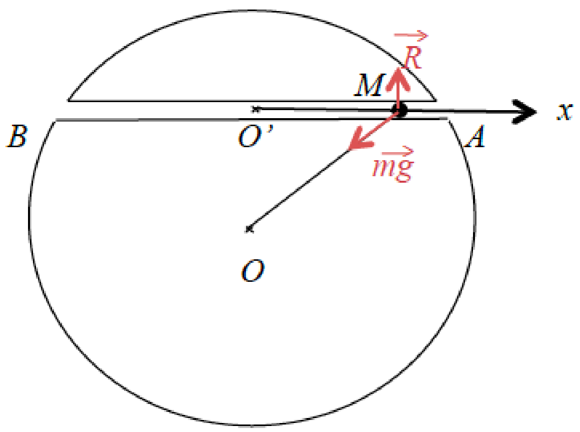
avec $M_{int} = M_T \left(\frac{r}{R}\right)^3$.

$\oiint \overrightarrow{g}.\overrightarrow{d^2S} = \oiint g(r).d^2S = g(r).4\pi r^2$.

D'où $g(r) = -\mathcal{G}M_T\frac{r}{R^3}$.

Avec $g(R) = -g_0$, il s'en déduit

$$\overrightarrow{g}(M) = -g_0\frac{r}{R}\overrightarrow{u_r}$$



L'objet est assujetti à se déplacer dans le tunnel. Soit x sa position, l'origine O' de l'axe étant au milieu du tunnel. La seconde loi de Newton donne :

$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R}$, ce qui par projection sur $(O'x)$ conduit à $m\ddot{x} = m\overrightarrow{g}.\overrightarrow{u_x} = mg(M)x$, soit

$$\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$ et de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$ (homogène).

La durée du parcours est égale à

$$\tau = T/2 = \pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}.$$

A.N. $\tau = 2,5.10^3$ s, soit 42 minutes

On remarque que ce temps est indépendant de la position de A et B à la surface du globe.