Choisissons l'origine O des coordonnées au niveau du dipôle. Le potentiel total est la somme du potentiel V_0 dont dérive $\overrightarrow{E_0}$, et du potentiel créé par le dipôle.

$E_0\overrightarrow{u_x} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_0 \Longrightarrow \frac{\partial V_0}{\partial x} = -E_0$ et $\frac{\partial V_0}{\partial y} = \frac{\partial V_0}{\partial z} = 0$. D'où $V_0 = -E_0 x + Cte.$

Le potentiel créé par le dipôle au point M est, en coordonnées polaires dans le plan contenant Met $\overrightarrow{p}$: $V_1(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$ en choisissant un potentiel V_1 nul à grande distance.

D'où le potentiel total :

$V(M) = -E_0 x + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} + Cte.$

Comme $\overrightarrow{E_0}$ et $\overrightarrow{p}$ sont parallèles de même sens, $x = r\cos\theta$ et $V(M) = \left(-E_0 r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}\right)\cos\theta + Cte.$

Il apparait donc que lorsque $-E_0 r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2} = 0$, soit $r = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$, le potentiel $V(M) = Cte$. La sphère, de centre O, de rayon

$$r_0 = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$$

est une surface équipotentielle. En choisissant la constante nulle, la sphère équipotentielle est au potentiel nul.

2. Dans un conducteur parfait (de conductivité γ tendant vers l'infini), le champ électrique est nul. Dans le cas contraire, la puissance volumique dissipée par effet Joule $p_V = \gamma E^2$ tendrait vers l'infini, ce qui n'est pas possible.

En utilisant la relation de passage à la traversée de la sphère de rayon R :

$\overrightarrow{E}\,(r = R^+) - \overrightarrow{E}\,(r = R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r}$, soit :

$$\overrightarrow{E}\left(r = R^+\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r} \qquad (1)$$

3. Il existe une analogie entre les deux situations décrites (dipôle placé dans un champ uniforme d'une part, boule conductrice placée dans un champ uniforme extérieur d'autre part, à condition de choisir les caractéristiques du dipôle de telle sorte que la surface équipotentielle déterminée en 1) corresponde à la surface équipotentielle de la sphère de rayon R, et de se limiter à l'étude de la région $r > R$.

Il faut donc prendre $R = r_0 = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$, soit

$$p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0 \qquad (2)$$

.

L'expression du champ pour $r = R^+$ peut être obtenu facilement avec le modèle équivalent dipôle dans le champ extérieur uniforme :

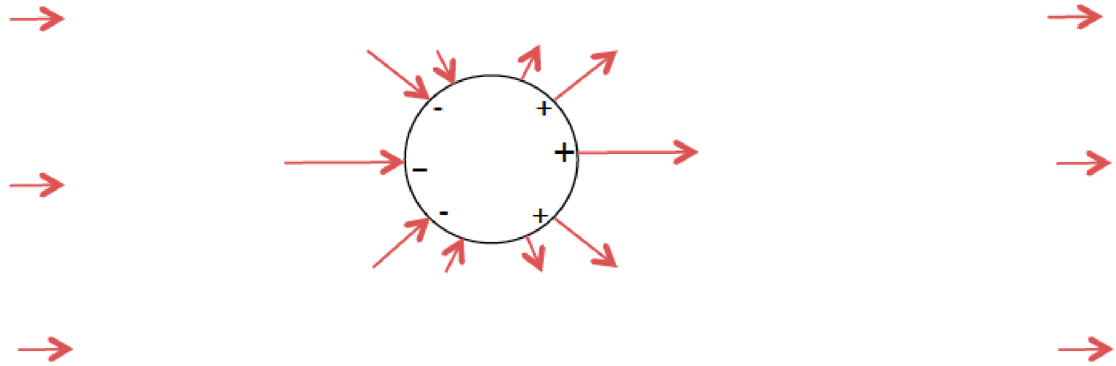
$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_1 + \overrightarrow{E_0}$. En utilisant les coordonnées polaires dans le plan $\overrightarrow{p}, M$:

$\overrightarrow{E_1} = -\frac{\partial V_1}{\partial r}\overrightarrow{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_1}{\partial\theta}\overrightarrow{u_\theta} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u_r} + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u_\theta}$, soit en $r = R$ avec (2)

$\overrightarrow{E_1} = 2E_0\cos\theta\overrightarrow{u_r} + E_0\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$.

Par ailleurs $\overrightarrow{E_0} = E_0\cos\theta\overrightarrow{u_r} - E_0\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$, d'où

$$\overrightarrow{E}\left(r = R^+\right) = 3E_0\cos\theta\overrightarrow{u_r}$$



Le champ est bien normal à la surface équipotentielle, comme attendu, et avec (1)

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

qui correspond ainsi à la charge surfacique non uniforme qui apparait sur une boule conductrice placée dans le champ uniforme $\overrightarrow{E_0}$.