Hypothèse : on néglige les “effets de bord” comme dans un condensateur plan.

On cherche la relation entre la différence de potentiel $V_1 - V_2$ et la charge portée par les armatures $Q_1 = -Q_2$.

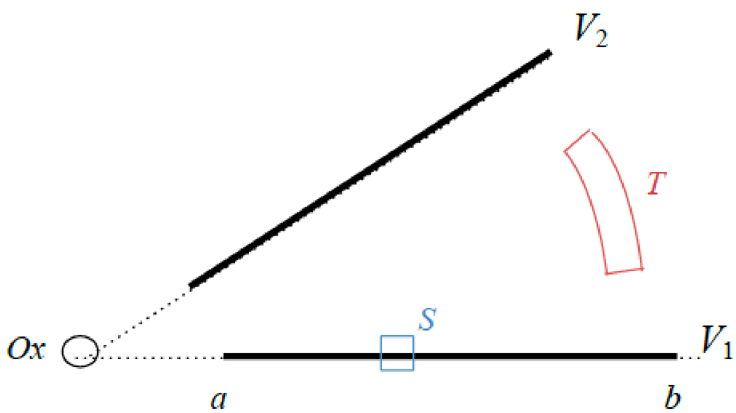
Les plans contenant (Ox) étant des surfaces équipotentielles, le champ $\overrightarrow{E}$ est orthoradial. En utilisant la base locale cylindrique, $\overrightarrow{E}(M) = E(M)\overrightarrow{u_\theta}$.

Comme $L \gg b$, $E(M)$ est indépendant de x (il y a invariance du problème par translation parallèlement à (Ox)).

Envisageons un tube de champ infinitésimal T de longueur ℓ selon (Ox) , limité par les rayons r et $r + dr$, et les angles θ_a et θ_b, compris entre les armatures. D'après le théorème de Gauss, le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers la surface fermée délimitant le tube de champ est nul ($Q_{int} = 0$). Le flux à travers les surfaces $\theta = \theta_a$ et $\theta = \theta_b$ est nul car $\overrightarrow{E}$ est tangent à la surface, d'où $\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S} = E(r, \theta_a)\ell.dr - E(r, \theta_b)\ell.dr = 0$, et ceci $\forall\ \theta_a$ et θ_b. Donc $E(M)$ est indépendant de θ.

$$\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{u_\theta}$$

$V_1 - V_2 = \int_1^2 \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = r\alpha E(r)$.



Pour trouver $E(r)$, on peut utiliser la relation de passage du champ électrique à la traversée d'une surface chargée (mais c'est hors programme), ou on applique le théorème de Gauss sur une petite surface fermée S de dimension ℓ selon (Ox), dr selon $\overrightarrow{u_r}$, contenant une portion de l'armature 1 (par exemple) : $Q_{int} = \sigma(r)\ell.dr$.

Le champ dans le conducteur parfait est nul et $\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S} = E(r)\ell.dr$. D'où

$$E(r) = \frac{\sigma(r)}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

Finalement, en intégrant sur une ligne de champ :

$$V_1 - V_2 = r\alpha\frac{\sigma(r)}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

La charge surfacique est d'autant plus grande qu'on se rapproche de (Ox).

La charge totale portée par l'armature est $Q_1 = \iint \sigma(r)d^2S = L\int_a^b \sigma(r)dr = \frac{\varepsilon_0(V_1-V_2)}{\alpha}L\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\varepsilon_0(V_1-V_2)}{\alpha}L\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

La relation $Q_1 = C\,(V_1 - V_2)$ donne

$$C = \frac{\varepsilon_0}{\alpha}L\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Cette expression (homogène) n'est pas directement comparable à la capacité d'un condensateur plan de section $L\,(b-a)$ d'épaisseur $\alpha(a+b)/2$, mais on vérifie que les deux expressions sont évidemment identiques pour $a \to b$.