Les plaques étant de grande dimension, le potentiel et le champ ne dépendent que de z, en négligeant les effets de bord. L'équation de Poisson $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ s'écrit :

$$V" - aV/\varepsilon_0 = 0.$$

a est en F.m^{-3}, d'où a/ε_0 en m^{-2}, l'équation est homogène. En tenant compte des conditions aux limites :

$$V(z) = -\frac{U}{2\sinh\left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon_0}}\frac{\ell}{2}\right)}\sinh\left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon_0}}z\right).$$

$$\overrightarrow{E}(z) = \sqrt{\frac{a}{\varepsilon_0}}\frac{U}{2\sinh\left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon_0}}\frac{\ell}{2}\right)}\cosh\left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon_0}}z\right)\overrightarrow{u_z}.$$

Dans le cas du vide , c'est le condensateur plan usuel : $\overrightarrow{E} = \frac{U}{\ell}\overrightarrow{u_z}$ est uniforme et $V(z) = Uz$ varie linéairement. On retrouve ce cas lorsque $\ell \ll \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{a}}$.

2. L'énergie potentielle d'une charge q dans le potentiel V est $E_p = qV$. D'après Boltzmann, $\rho^+(z) = A\exp\left(-\frac{eV(z)}{k_BT}\right)$ et $\rho^- = B\exp\left(\frac{eV(z)}{k_BT}\right)$.

Avec $|U| \ll \frac{k_BT}{e}$, et un d.l. d'ordre 1 en $\frac{eV(z)}{k_BT}$: $\rho(z) = \rho^+(z) + \rho^-(z) \simeq -(A-B)\frac{eV(z)}{k_BT}$. On retrouve la relation donnée avec $a = (A-B)\frac{e}{k_BT}$.

Remarque : $\rho(z) = \rho^+(z) + \rho^-(z)$ est impair $(\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right))$, donc $B = -A$. On obtient dans le cas général $\rho(z) = 2B\sinh\left(\frac{eV(z)}{k_BT}\right)$, B étant un coefficient de normalisation dépendant du nombre de charges présentes.