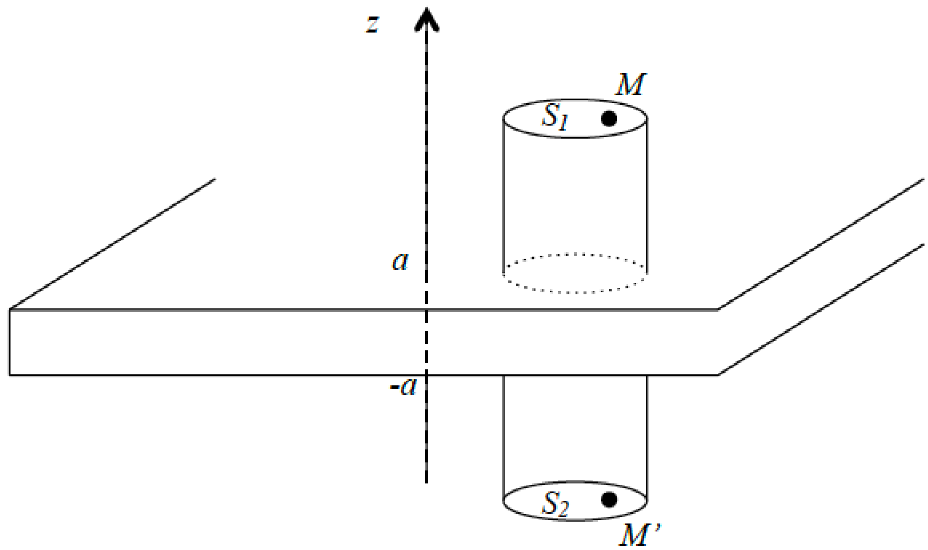
1. C'est un exercice archi classique.



<u>Déterminons le champ électrostatique</u> en un point M quelconque, en utilisant le théorème de Gauss pour cette distribution de charge présentant des symétries et invariances. Etant donnée la symétrie du problème, on utilise les coordonnées cartésiennes x, y, z.

- Tout plan contenant M et parallèle à l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de charge ; donc le champ gravitationnel est porté par l'intersection de ces plans $\overrightarrow{E}(M) = E(M)\overrightarrow{u_z}$

- Il y a invariance de la distribution de masse par translation parallèlement aux axes (Ox) et (Oy) , donc $E(M) = E(z)$

- Appliquons le théorème de Gauss en utilisant comme surface fermée un cylindre symétrique par rapport au plan $z = 0$, d'axe parallèle à (Oz), dont l'une des extrémités (S_1) passe par M, de section S : $\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

avec $M_{int} = M_T \left(\frac{r}{R}\right)^3$.

$\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S} = \iint_{\text{paroi latérale}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S} + \iint_{\text{extrémité S}_1} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S_1} + \iint_{\text{extrémité S}_2} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S_2}$

- $\iint_{\text{paroi latérale}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S} = 0$ car $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{d^2S}$ sur la paroi latérale
- Soit $M' = \text{Sym}\,(M)$ par rapport au plan $z = 0$. Ce plan est plan de symétrie de la distribution de charge donc $\overrightarrow{E}\,(M') = \text{Sym}\left[\overrightarrow{E}\,(M)\right]$ par rapport au plan $z = 0$, soit puisque $\overrightarrow{E}(M) = E(M)\overrightarrow{u_z}$, $\overrightarrow{E}(M') = -\overrightarrow{E}(M)$. Donc comme l'élément de surface $\overrightarrow{d^2S}$ est toujours dirigé vers l'extérieur de la surface fermée, $\overrightarrow{d^2S_1}$ et $\overrightarrow{d^2S_2}$ ont des orientations contraires, d'où $\iint_{\text{extrémité S}_1} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{d^2S_1} = \iint_{\text{extrémité S}_2} \overrightarrow{E}\,(M')\,.\overrightarrow{d^2S_2}$

Finalement $\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S} = 2\iint_{\text{extrémité S}_1} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{d^2S_1}$. Considérons $z > 0$ pour simplifier : $2\iint_{\text{extrémité S}_1} E(z).d^2S_1 = 2E(z).S$

Pour évaluer Q_{int}, il faut distinguer deux cas :

- $|z| > a$. Alors $Q_{int} = 2aS\rho_0$. Le théorème de Gauss s'écrit pour $z > a$, $2E(z).S = \frac{2aS\rho_0}{\varepsilon_0}$, soit

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{a\rho_0}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ pour } z > a$$

$$\text{et } \overrightarrow{E}(M) = -\frac{a\rho_0}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ pour } z < a$$

- $|z| \leq a$. Alors $Q_{int} = 2\,|z|\,S\rho_0$. Le théorème de Gauss s'écrit pour $2E(z).S = \frac{2zS\rho_0}{\varepsilon_0}$, soit

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{z\rho_0}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \text{ pour } |z| \leq a$$

Remarque :

- à l'extérieur de la zone chargée, on retrouve comme dans le cas du plan infini uniformément chargé, un champ uniforme de part et d'autre du plan, $a\rho_0$étant l'équivalent d'une charge surfacique.

- on vérifie la continuité du champ électrique pour une distribution volumique de charge.

Déterminons le potentiel électrostatique

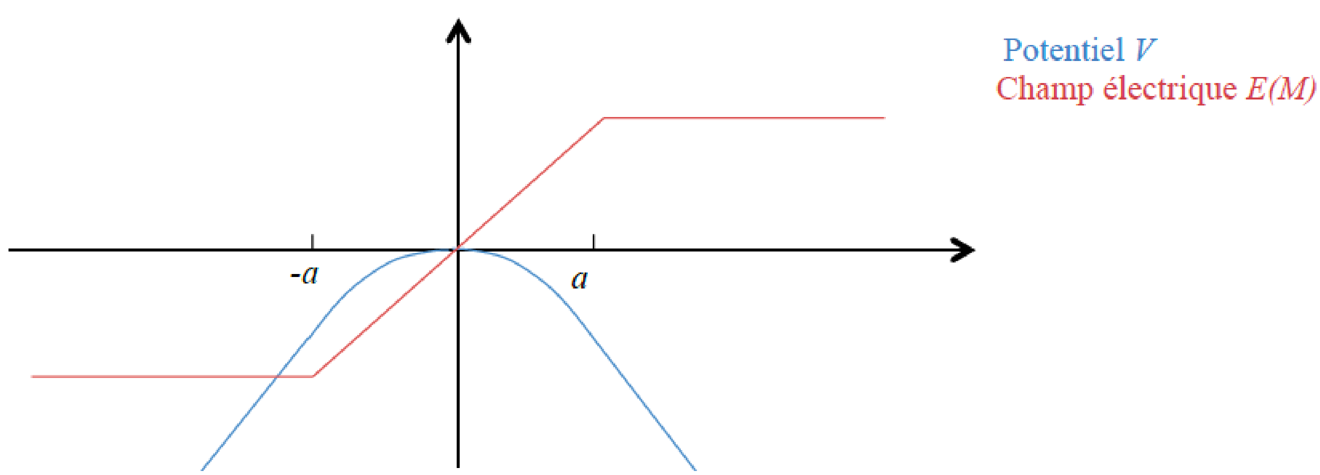
$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ est porté par (Oz) , donc V ne dépend que de z et $\frac{dV}{dz} = -E(z)$.

- $|z| \leq a$, $V(z) = -\frac{\rho_0 z^2}{2\varepsilon_0} + C$. En choisissant arbitrairement $V(0) = 0$,

$$V(z) = -\frac{\rho_0 z^2}{2\varepsilon_0} \text{pour } |z| \leq a$$

- $|z| > a$, $V(z) = -\frac{a\rho_0}{\varepsilon_0}\,|z| + C'$. Le potentiel est continu en $\pm a$, d'où $C' = \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0}$.

$$V(z) = -\frac{a\rho_0\,|z|}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0} \text{pour } |z| > a$$



2. La densité volumique de charge n'est pas uniforme. Une façon de faire peut être d'utiliser le théorème de superposition en "découpant" la distribution de charges en volumes d'épaisseur infinitésimale compris entre les côtes z_0 et $z_0 + dz_0$.

Chaque tranche crée un champ électrique

- $\overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho(z_0)}{\varepsilon_0} dz_0 \overrightarrow{u_z}$ pour $z > z_0 + dz$
- $\overrightarrow{E}(M) = -\frac{\rho(z_0)}{\varepsilon_0} dz_0 \overrightarrow{u_z}$ pour $z < z_0$

et il suffit de “sommer” les champs. Il s'agit ici d'une somme continue de $z_0 = 0$ à $z_0 \to \infty$. Il faut encore distinguer deux cas :

- Pour $z < 0$, $\overrightarrow{E}(M) = -\int_0^\infty \frac{\rho(z_0)}{\varepsilon_0} dz_0 \overrightarrow{u_z} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int_0^\infty \exp(-z_0/a)\, dz_0 \overrightarrow{u_z}$

$$\overrightarrow{E}(M) = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} \overrightarrow{u_z}$$

- Pour $z > 0$, $\overrightarrow{E}(M) = \left[\int_0^z \frac{\rho(z_0)}{\varepsilon_0} dz_0 - \int_z^\infty \frac{\rho(z_0)}{\varepsilon_0} dz_0\right] \overrightarrow{u_z}$

Soit $\overrightarrow{E}(M) = \left[\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}(1 - \exp(-z/a)) + \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}(0 - \exp(-z/a))\right] \overrightarrow{u_z}$,

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}(1 - 2\exp(-z/a)) \overrightarrow{u_z}$$

Le champ est bien continu en $z = 0$, comme attendu pour une distribution volumique de charge. À l'extérieur de la distribution, le champ est uniforme.

Remarque : l'évolution du champ aurait pu être obtenue (à une constante près) en utilisant l'équation locale de Maxwell-Gauss.

Comme en 1, $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ est porté par (Oz) , donc V ne dépend que de z et $\frac{dV}{dz} = -E(z)$.

- Pour $z < 0$, $\frac{dV}{dz} = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}$. En choisissant arbitrairement $V(0) = 0$,

$$V(z) = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} z$$

- Pour $z > 0$, $\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}(1 - 2\exp(-z/a))$. D'où

$$V(z) = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}(z - 2a[1 - \exp(-z/a)])$$