1) Dans le référentiel galiléen de point fixe $C$ , le théorème du centre d'intertie donne en projection sur $(CT)$ : $M_T\Omega^2 CT = \mathscr{G} M_T M_S/ST^2$. Avec $\overrightarrow{TC} = \frac{M_S}{M_T+M_S}\overrightarrow{TS}$ ,

$$\Omega^2 = \mathscr{G}\frac{M_T + M_S}{ST^3}$$

2) Dans $\mathcal{R}$", l'équilibre de $P$ sous l'action de la force gravitationnelle du Soleil, celle exercée par la Terre, et de la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}} = m\Omega^2\overrightarrow{CP}$:

$$-\mathscr{G}M_S\frac{\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_S}}{\|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_S}\|^3} - \mathscr{G}M_T\frac{\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_T}}{\|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_T}\|^3} + \Omega^2\overrightarrow{r_P} = \overrightarrow{0}$$

ou avec 1) :

$$-M_S\frac{\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_S}}{\|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_S}\|^3} - M_T\frac{\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_T}}{\|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_T}\|^3} + \frac{M_T + M_S}{\|\overrightarrow{r_S} - \overrightarrow{r_T}\|^3}\overrightarrow{r_P} = \overrightarrow{0}$$

3) En projetant sur $(Cy)$ :

$$-\frac{M_S}{\|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_S}\|^3} - \frac{M_T}{\|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_T}\|^3} + \frac{M_T + M_S}{\|\overrightarrow{r_S} - \overrightarrow{r_T}\|^3} = 0 \tag{1}$$

En projetant sur l'axe $(CY)$ :

$$M_S\frac{\overrightarrow{r_S}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_S}\|^3} + M_T\frac{\overrightarrow{r_T}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_T}\|^3} = 0 \tag{2}$$

4) Comme $\overrightarrow{r_S}$ et $\overrightarrow{r_T}$ sont parallèles :

$$M_S\frac{\overrightarrow{r_S}}{\|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_S}\|^3} + M_T\frac{\overrightarrow{r_T}}{\|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_T}\|^3} = \overrightarrow{0}$$

Or $M_S\overrightarrow{r_S} + M_T\overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{0}$ par définition du centre de masse, donc $\|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_S}\|^3 = \|\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_T}\|^3$

Soit $SP = TP$. Alors 1 donne que $TS = SP = TP$ . Les positions L4 et L5 forment chacune avec $S$ et $T$ un triangle équilatéral.

Remarque :

Les points L1 et L2 sont des équilibres instables, ce qui les rend utilisables dans le cadre de missions spatiales : on n'y trouve pas de corps naturels, et un équilibre dynamique peut y être maintenu pour une consommation de carburant raisonnable (le champ gravitationnel étant faible dans leur voisinage).

Les principaux avantages de ces positions, en comparaison des orbites terrestres, sont leur éloignement de la Terre et leur exposition au Soleil constante dans le temps. Le point L1 se prête particulièrement à l'observation du Soleil et du vent solaire. Ce point a été occupé pour la première fois en 1978 par le satellite ISEE-3, et est actuellement occupé par les satellites SoHO, DSCOVR, Advanced Composition Explorer et Lisa Pathfinder9. Le point L2 est à l'inverse particulièrement intéressant pour les missions d'observation du cosmos, qui embarquent des instruments de grande sensibilité devant être détournés de la Terre et de la Lune, et fonctionnant à très basse température. Il est actuellement occupé par les satellites Herschel, Planck, WMAP, Gaia et le sera par le JWST en 202010.

Il a été un temps envisagé de placer un télescope spatial au point L4 ou L5 du système Terre-Lune, mais cette option a été abandonnée après que des nuages de poussière y ont été observés.