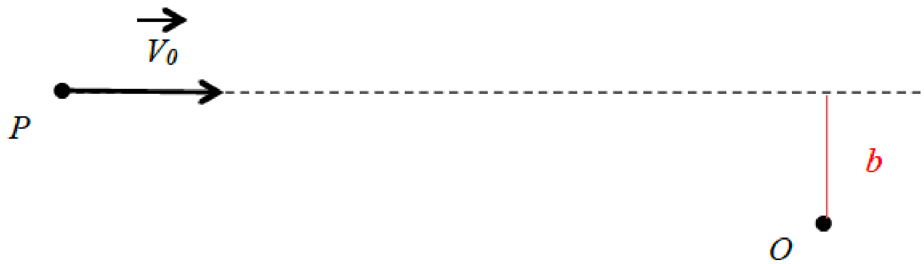
1. b est le paramètre d'impact : c'est la distance de O à la droite passant par le point matériel P à grande distance de O et parallèle à la vitesse $\overrightarrow{V_0}$. Ainsi le moment cinétique de P par rapport à O a pour norme $L = \left\| \overrightarrow{OP_\infty} \wedge m\overrightarrow{V_0} \right\| = mbV_0$.



2. La force étant centrale, le mouvement du point matériel est plan. Pour une force newtonienne attractive, le cours montre que la trajectoire est une conique dont la nature dépend de la valeur de l'énergie mécanique (qui se conserve au cours du mouvement) : l'énergie potentielle tendant vers 0 à grande distance, soit $E_p = -G\frac{mM}{r}$,

pour $E_m > 0$, la trajectoire est hyperbolique

pour $E_m = 0$, la trjectoire est parabolique

pour $E_m < 0$, la trajectoire est elliptique ou circulaire.

Le point matériel est initialement à grande distance, donc l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV_0^2 > 0$: la trajectoire est hyperbolique.

Dans le plan de la trajectoire, utilisons les coordonnées polaires : $E_c = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$. D'où $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$. Pour la distance minimale d'approche $\dot{r} = 0$, d'où : $\frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}mV_0^2$. En multipliant par r^2, on obtient une équation du second degré en r, et seule la racine positive est à retenir. D'où (on vérifie l'homogénéité) :

$$r_{min} = -\frac{GM}{V_0^2} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{V_0^4} + \frac{L^2}{m^2V_0^2}}$$

$L = mV_0b$, d'où $r_{min} = -\frac{GM}{V_0^2} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{V_0^4} + b^2}$, soit $b^2 = -\frac{G^2M^2}{V_0^4} + \left(r_{min} + \frac{GM}{V_0^2}\right)^2 = r_{min}^2 + 2r_{min}\frac{GM}{V_0^2}$.

$$b = \sqrt{r_{min}^2 + 2r_{min}\frac{GM}{V_0^2}}$$

3. La vitesse de libération est celle qui permet à un objet situé à la surface de la planète d'échapper à son attraction gravitationnelle. Pour retrouver son expression on exprime l'énergie mécanique de l'objet de masse μ : $E_m = \frac{1}{2}\mu V_1^2 - G\frac{\mu M}{R}$. Si cet objet peut partir à grande distance, alors son énergie mécanique (qui se conserve au cours du mouvement) est égale à grande distance à son énergie cinétique, elle est donc positive. D'où la valeur limite $E_m = \frac{1}{2}\mu V_1^2 - G\frac{\mu M}{R} = 0$, soit

$$V_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

La masse m heurte la planète lorsque $r_{min} \leq R$, soit $-\frac{GM}{V_0^2} + \sqrt{\frac{G^2M^2}{V_0^4} + \frac{L^2}{m^2V_0^2}} \leq R$ ou $-\frac{R}{2}\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^4 + b^2} \leq R$, soit $\left(\frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^4 + b^2 \leq \left(R + \frac{R}{2}\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2\right)^2$, ce qui donne bien la condition demandée :

$$b^2 < b_{max}^2 = R^2\left(1 + \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2\right)$$

4. Les points de paramètre d'impact inférieurs à b_{max} heurtent la planète. Ainsi les points se trouvant à grande distance de la planète dans un cylindre de section πb_{max}^2 heurteront la planète ultérieurement. Le nombre de points qui vont traverser une section du cylindre pendant dt est $nV_0 dt\pi b_{max}^2$. Ainsi, le nombre de points heurtant la planète par unité de temps est

$$N = nV_0\pi b_{max}^2$$

Remarque : tous les points qui se trouvaient sur une section du cylindre ne le heurteront pas à la même date, mais en régime "permanent", le temps de parcours associé à une trajectoire particulière ne varie pas, ce qui permet d'obtenir le résultt ci-dessus.

5. $\frac{dM}{dt} = Nm = mnV_0\pi b_{max}^2$, soit $4\pi R^2 \frac{dR}{dt}\rho = mnV_0\pi R^2\left(1+\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2\right)$, d'où

$$\frac{dR}{dt} = \frac{mnV_0}{4\rho}\left(1+\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2\right)$$

Avec $V_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{mnV_0}{4\rho}\left(1+\frac{8G\rho\pi R^2}{3V_0^2}\right)$$

Pour $V_0 \ll V_1$, $\frac{dR}{dt} \simeq \frac{mnV_1^2}{4\rho V_0} = \frac{mn2GM}{4\rho V_0 R} = \frac{mn2G\pi R^2}{3V_0}$

Pour $V_0 \gg V_1$, $\frac{dR}{dt} \simeq \frac{mnV_0}{4\rho}$.

Le terme de focalisation gravitationnelle est justifié par la courbure des trajectoires initialement rectilignes par l'attraction de la planète, qui est foyer de l'hyperbole trajectoire. Ainsi la trajectoire des objets est dévié vers la planète, de même que des rayons lumineux parallèles à l'axe d'une lentille convergente convergent vers le foyer de la lentille.

En raison de l'accrétion, le rayon de la planète augmente. Il arrive donc un moment, pour un flux de particules de vitesse V$_0$ donnée, où $V_0 > V_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Le terme d'accrétion galopante se justifie par le fait que la masse (et donc aussi le rayon) de la planète augmente au cours du temps, et cela d'autant plus que le rayon de la planète est grand, comme le montre l'expression de $\frac{dR}{dt}$ dans le cas où $V_0 \ll V_1$.

6. Comme le montre l'expression du 5) : $\frac{dR}{dt} = \frac{mnV_0}{4\rho}\left(1+\frac{8G\rho\pi R^2}{3V_0^2}\right)$, la planète de plus grand rayon, et par conséquent de plus grande masse, correspond à une valeur de $\frac{dR}{dt}$ plus grande. Donc le rapport M_1/M_2 augmente au cours du temps, la plus grosse planète va croitre beaucoup plus vite que la petite planète. Cela permet probablement de justifier la formation de corps célestes massifs