1. Lorsque les pendules de même masse entrent en collision, avec des vitesses $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v}$ horizontales dans le référentiel du laboratoire, quantité de mouvement totale et énergie cinétique totale se conservent. Les deux pendules, ne pouvant s'interpénétrer, repartent donc avec des vitesses opposées pour assurer que la quantité de mouvement totale reste nulle, et de même norme que les vitesses avant collision pour assurer la conservation de l'énergie cinétique. Ainsi après collision $\overrightarrow{v_1'} = -\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v_2'} = \overrightarrow{v}$.

Tout se passe comme si l'on avait deux pendules simples, de longueur ℓ, de masse m, échangeant leurs vitesses au moment de la collision. Ainsi pour chaque phase du mouvement le problème se ramène à l'étude de deux pendules simples identiques, chaque pendule conservant lors de la collision la norme de sa vitesse en la changeant de sens.

2. Considérons par exemple le pendule de droite repéré par l'angle $\theta(t)$.

Lors d'une "descente" du pendule ($|\theta|$ diminue), plaçons nous dans le référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel A est immobile, de vitesse initiale nulle par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, et en translation d'accélération $a_0\overrightarrow{u_z}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire. Dans ce référentiel on peut écrire le principe fondamental de la dynamique : le pendule est soumis à son poids, à la tension du fil, et à la force d'inertie d'entraînement.

$m\overrightarrow{a}(M)_{\mathcal{R}'} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{f_{ie}} = \overrightarrow{T} + m\left(\overrightarrow{g} - a_0\overrightarrow{u_z}\right)$

En coordonnées polaires, on projette comme d'habitude pour le pendule simple sur $\overrightarrow{u_\theta}$ pour obtenir l'équation :

$$\ell\ddot{\theta} = -\left(g + a_0\right)\sin\theta \tag{1}$$

Par rapport au cas classique du pendule simple, g a été remplacé par $g + a_0$.

Lors de la "montée" des pendules ($|\theta|$ augmente), un raisonnement identique conduit à

$$\ell\ddot{\theta} = -\left(g - a_0\right)\sin\theta \tag{2}$$

3. Il est nécessaire de traiter séparément les deux phases.

Phase de descente : en multipliant (1) par $\dot{\theta}$ et en intégrant par rapport au temps entre $t = 0$ et $t = t_1^-$, où t_1 est la date de la première collision :

$$\frac{1}{2}m\left(\ell\dot{\theta}\left(t_1\right)\right)^2 - 0 = m\left(g + a_0\right)\ell\left(1 - \cos\theta_0\right) \tag{3}$$

Remarque : par rapport au pendule simple usuel, il suffit de remplacer g par $(g + a_0)$.

Dans le référentiel du laboratoire, la vitesse du pendule à $t = t_1^-$ est l'opposée de la vitesse à $t = t_1^+$. On dispose ainsi de la condition initiale sur la vitesse pour le début de la phase de montée.

Phase de montée : en multipliant (2) par $\dot{\theta}$ et en intégrant par rapport au temps entre $t = t_1^+$ et $t = t_1'^-$, où t_1' est la date de fin de la montée, lorsque $\dot{\theta} = 0$ et l'angle atteint sa valeur maximale $\theta = \theta_1$,

$$0 - \frac{1}{2}m\left(\ell\dot{\theta}\left(t_1\right)\right)^2 = m\left(g - a_0\right)\ell\left(\cos\theta_1 - 1\right) \tag{4}$$

D'où avec (3) et (4) :

$$1 - \cos\theta_1 = \frac{g + a_0}{g - a_0}\left(1 - \cos\theta_0\right)$$

Au bout de n cycles,

$$1 - \cos\theta_n = \left(\frac{g + a_0}{g - a_0}\right)^n\left(1 - \cos\theta_0\right)$$

Pour arriver à $\theta_n = \pi$, $\left(\frac{g+a_0}{g-a_0}\right)^n = \frac{2}{1-\cos\theta_0}$, soit

$$n = \frac{\ln\left(\frac{2}{1-\cos\theta_0}\right)}{\ln\left(\frac{g+a_0}{g-a_0}\right)}$$

Il faut que n soit entier, on prendra donc l'entier immédiatement supérieur.

A.N. $n = 35$.