Cet exercice modélise un jouet appelé tac-tac : constitué de deux boules de plastique dur, reliées entre elles par une cordelette que le joueur tient par son milieu. Le but est d'amener les boules à rebondir l'une contre l'autre, jusqu'à ce que le mouvement prenne assez d'amplitude pour que les boules s'entrechoquent aussi bien au-dessus qu'au-dessous de la main du joueur.

Soient deux pendules simples de longueur ℓ. A une des extrémités de chacun d'entre eux se trouve une masse m, les autres extrémités étant reliées au même point A par des fils rigides de masse négligeable. Les deux pendules sont lâchés à l'instant initial symétriquement avec une vitesse nulle et à un angle θ par rapport à la verticale descendante, tel que $|\theta| = \theta_0$. Lorsque les deux pendules descendent ($|\theta|$ diminue), le point A initialement immobile accélère avec une accélération ascendante (accélération $a_0\overrightarrow{u_z}, 0 < a_0 < g$), lorsque les deux pendules remontent ($|\theta|$ augmente), le point A a une accélération $-a_0\overrightarrow{u_z}$.

(En réalité, il y a à l'issue de la phase d'accélération ascendante de A une phase de décélération de durée très brève devant la durée de la phase d'accélération, au cours de laquelle la vitesse de A dans le référentiel du laboratoire diminue jusqu'à s'annuler, la position de A variant très peu ; idem lors de la phase d'accélération descendante de A).

Les deux pendules subissent des chocs élastiques (énergie cinétique conservée dans le référentiel du laboratoire).

1. Montrer qu'on peut se ramener à l'étude d'un seul pendule de longueur ℓ, de masse m.

2. Trouver les équations différentielles vérifiées par $\theta(t)$ lors des deux phases (descente et montée).

3. Exprimer θ_1 l'angle auquel remonte les pendules au bout d'un cycle descente-montée. Au bout de combien de cycles les deux pendules arrivent-ils en haut ($\theta = \pi$)? $g = 10$ m.s^{-2}, $a_0 = 0{,}2$ m.s^{-2}, $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$.