1. En référentiel terrestre supposé galiléen, on étudie le système formé de la barre et des trois masses.

- Les actions exercées sont :

- les tensions des deux ressorts : $\overrightarrow{F_A} = -2kz_A\overrightarrow{u_z}$; $\overrightarrow{F_C} = -kz_C\overrightarrow{u_z}$

- les trois poids.

- Position de G : $\overrightarrow{AG} = \frac{2m\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}}{6m}$, d'où $AG = \frac{2L}{3}$. Alors $GB = \frac{L}{3}$ et $GC = \frac{4L}{3}$.

- À l'équilibre, la somme des forces extérieures est nulle. D'où

$$6mg = k(2z_A + z_C).$$

La somme des moments des forces extérieures, calculée par rapport à l'axe (Gy) est nulle (G point fixe à l'équilibre):

$\frac{2L}{3}(-2kz_A)\cos\theta + \frac{4L}{3}kz_C\cos\theta = 0.$

$$z_A = z_C = \frac{2mg}{k}.$$

Par conséquent $z_B = 2mg/k$ également.

2. Il y a deux degrés de liberté z_G et θ ; $z_A = z_G + \frac{2L}{3}\sin\theta$ et $z_C = z_G - \frac{4L}{3}\sin\theta$.

Avec le théorème du centre de masse projeté sur (Oz) et dans l'approximation des petits angles :

$6m\ddot{z_G} = 6mg - 2kz_A - kz_C = 6mg - 3kz_G - k(2\frac{2L}{3}\theta - \frac{4L}{3}\theta) = 6mg - 3kz_G.$

$$\ddot{z_G} + \frac{k}{2m}z_G = g.$$

On retrouve la valeur à l'équilibre précédente.

Pour appliquer le théorème du moment cinétique, plaçons-nous dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, référentiel en translation par rapport au référentiel du laboratoire et dans lequel G est fixe. Dans $\mathcal{R}^*$, la barre a un mouvement de rotation autour de (Gy) et on applique le théorème du moment cinétique scalaire rapport à l'axe (Gy).

Dans $\mathcal{R}^*$, aux actions exercées précédentes s'ajoutent les forces d'inertie $-m_i\ \overrightarrow{a}G)\rfloor_R$.

Le moment du poids total, s'appliquant en G, est nul. Le moment par rapport à G des forces d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{M}_{G,\overrightarrow{f_{ie}}} = (m\overrightarrow{GA} + 2m\overrightarrow{GB} + 3m\overrightarrow{GC}) \wedge (-\ \overrightarrow{a}G)\rfloor_R) = \overrightarrow{0} \wedge (-\ \overrightarrow{a}G)\rfloor_R) = \overrightarrow{0}$.

D'où : $J\ddot{\theta} = \frac{2L}{3}(-2kz_A\cos\theta) + \frac{4L}{3}(kz_C\cos\theta)$.

En se limitant aux petits angles

$J\ddot{\theta} = \frac{2L}{3}(-2k\left(z_G + \frac{2L}{3}\theta\right) + \frac{4L}{3}k\left(z_G - \frac{4L}{3}\theta\right) = -\frac{8}{3}kL^2\theta$

$J = 3m\left(\frac{2L}{3}\right)^2 + 2m\left(\frac{L}{3}\right)^2 + m\left(\frac{4L}{3}\right)^2 = \frac{10}{3}mL^2$, d'où

$$\ddot{\theta} + \frac{4}{5}\frac{k}{m}\theta = 0.$$

Les deux équations obtenues correspondent à des oscillations sinusoïdales de z_G et θ autour des valeurs $z_{G\acute{e}q} = \frac{2mg}{k}$ et $\theta_{\acute{e}q} = 0$.