On suppose le référentiel terrestre galiléen.

1) Le moment du poids peut faire basculer le tronc lorsque son centre d'inertie G dépasse le sommet de la falaise, soit une distance parcourue de $L/2$.

2) Le tronc est soumis à son poids, la réaction en A : $\overrightarrow{R_A} = T_A\overrightarrow{u_x} + N_A\overrightarrow{u_y}$, la réaction en B : $\overrightarrow{N_B} = N_B\overrightarrow{u_y}$.

L'équilibre impose :

- la somme des forces est nulle : $\begin{cases} T_A - mg\sin\alpha = 0 \\ N_A + N_B - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$

- le moment des forces par rapport à (By) est nul : $N_A L - mg\frac{L}{2}\cos\alpha = 0$.

L'exercice fait appel aux lois de Coulomb pour le contact entre solides. La condition d'équilibre $T_A \leq fN_A$ donne

$$f \geq 2\tan\alpha.$$

3) L'explosion communique une énergie cinétique initiale E_{c0}. On cherche si G peut atteindre le sommet. L'abscisse de G est $x(t)$ avec $x(0) = 0$.

Le tronc est soumis aux forces du 1) avec cette fois $T_A = fN_A$ puisqu'il y a glissement.

Tant qu'il y a translation (pas de rotation du solide), le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à (By) donne toujours $N_A\left(L - x\right) - mg\left(\frac{L}{2} - x\right)\cos\alpha = 0$.

Attention, cette fois, la force de frottement s'oppose au mouvement de l'arbre et est orientée selon $-\overrightarrow{u_x}$.

D'où $T_A = -fmg\frac{\frac{L}{2}-x}{L-x}\cos\alpha$.

Seuls $\overrightarrow{T_A}$ et le poids travaillent. Lorsque G atteint le sommet, le théorème de l'énergie cinétique impose :

$\frac{1}{2}mv^2 - E_{c0} = -\int_{x=0}^{L/2}\left[fmg\frac{\frac{L}{2}-x}{L-x}\cos\alpha + mg\sin\alpha\right]dx$.

C'est possible pour $\frac{1}{2}mv^2 = E_{c0} - mg\left[f\cos\alpha\int_{x=0}^{L/2}\frac{\frac{L}{2}-x}{L-x}dx + (L/2)\sin\alpha\right] \geq 0$.

$\int_{x=0}^{L/2}\frac{\frac{L}{2}-x}{L-x}dx = \int_{x=0}^{L/2}\left(1 - \frac{\frac{L}{2}}{L-x}\right)dx = \frac{L}{2}\left(1 - \ln 2\right)$

En considérant que l'énergie libérée par l'explosion d'une masse M est intégralement transmie au tronc sous forme d'énergie cinétique (hypothèse très grossière), la masse minimale est (homogène) :

$$M \geq m\frac{gL}{2\varepsilon}\left[f\left(1 - \ln 2\right)\cos\alpha + \sin\alpha\right].$$

A.N. : $M = 0,6$ kg.