1. Le référentiel terrestre est supposé galiléen. M est soumis à son poids , à la réaction verticale du support, à la tension du fil $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u_x}$ et à la tension du ressort $\overrightarrow{T} = -k\left(x-\ell_0\right)\overrightarrow{u_x}$.

M' est soumis à la tension du fil $\overrightarrow{F'} = -F'\overrightarrow{u_z}$ et à son poids.

À l'équilibre, en l'absence de frottement du fil sur la poulie $F = F'$. Le pfd appliqué aux deux masses donne :

$m\ddot{x} = -k\left(x-\ell_0\right) + F = 0$

$m'\ddot{z} = m'g - F = 0$ D'où

$$x = x_{éq} = \ell_0 + \frac{m'g}{k}$$

2. Le fil est inextensible $\ddot{z} = \ddot{x} \Longrightarrow \left(m+m'\right)\ddot{x} = m'g - k\left(x-\ell_0\right)$, soit avec $u = x - x_{éq}$,

$\left(m+m'\right)\ddot{u} = -ku$, d'où la période (homogène)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+m'}{k}}$$

3. Les deux tensions du fil de part et d'autre de la poulie ne sont plus égales.

$m\ddot{x} = -k\left(x-\ell_0\right) + F$

$m'\ddot{z} = m'g - F'$

La poulie est soumises aux tensions des fils opposées aux précédentes, le fil étant sans masse, aux actions d'axe dont le moment par rapport à l'axe de rotation est nul (pas de frottement), et à son poids dont le moment par rapport à l'axe est nul, le centre d'inertie étant sur l'axe. On applique le théorème du moment cinétique à la poulie, en projection par rapport à son axe :

$J\ddot{\theta} = R(F' - F)$

Pas de glissement du fil sur la poulie, donc $\ddot{x} = \ddot{z} = R\ddot{\theta}$

D'où en sommant : $\left(m + m' + \mu/2\right)\ddot{u} = -ku$, soit

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m+m'+\mu/2}{k}}$$

4. M est soumis à son poids , à la réaction verticale du support $\overrightarrow{R_N}$ et à la réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$, à la tension du fil $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u_x}$ et à la tension du ressort $\overrightarrow{T} = -k\left(x-\ell_0\right)\overrightarrow{u_x}$.

M' est soumis à la tension du fil $\overrightarrow{F'} = -F'\overrightarrow{u_z}$ et à son poids.

À l'équilibre, en l'absence de frottement du fil sur la poulie $F = F'$. Le pfd appliqué aux deux masses donne :

$-k\left(x-\ell_0\right) + F + R_T = 0$

$R_N = mg$

$m'g - F = 0$

D'où $R_T = k\left(x-\ell_0\right) - m'g$. L'équilibre nécessite $|R_T| \leq f_s R_N$, soit $|k\left(x-\ell_0\right) - m'g| \leq f_s mg$

Pour $k\left(x-\ell_0\right) - m'g > 0, k\left(x-\ell_0\right) - m'g < f_s mg \Longrightarrow \ell_0 + \frac{g}{k}m' \leq x \leq \ell_0 + \frac{g}{k}\left(m' + f_s m\right)$.

Pour $k\left(x-\ell_0\right) - m'g < 0, -k\left(x-\ell_0\right) + m'g < f_s mg \Longrightarrow \ell_0 + \frac{g}{k}\left(m' - f_s m\right) \leq x \leq \ell_0 + \frac{g}{k}m'$

Finalement, il y a une plage de valeurs possibles pour l'équilibre :

$$\ell_0 + \frac{g}{k}\left(m' - f_s m\right) \leq x \leq \ell_0 + \frac{g}{k}\left(m' + f_s m\right)$$