En référentiel terrestre supposé galiléen, les actions exercées sur la barre 1 sont :

- Poids
- Actions d'axe de moment nul
- Tension du ressort : $\overrightarrow{F_1} = k\ell\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)\overrightarrow{u_x}$

On applique le théorème du moment cinétique scalaire pour la barre 1 par rapport à l'axe fixe parallèle à (y) passant par O_1 :

$$J_1\ddot{\theta_1} = -m_1 g\frac{\ell}{2}\sin\theta_1 + \ell F_1\cos\theta_1$$

En se limitant au premier ordre en θ_i :

$$J_1\ddot{\theta_1} = -m_1 g\frac{\ell}{2}\theta_1 + k\ell^2\left(\theta_2 - \theta_1\right)$$

Barre 2 : de même

$$J_2\ddot{\theta_2} = -m_2 g\frac{\ell}{2}\theta_2 - k\ell^2\left(\theta_2 - \theta_1\right)$$

Soit :

$$\begin{cases}\ddot{\theta_2} = -g\frac{3}{2\ell}\theta_2 - \frac{3k}{m_2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)\\ \ddot{\theta_1} = -g\frac{3}{2\ell}\theta_1 - \frac{3k}{m_1}\left(\theta_1 - \theta_2\right)\end{cases}$$

Posons $\omega_0^2 = g\frac{3}{2\ell}$, $\omega_1^2 = \frac{3k}{m_1}$, $\omega_2^2 = \frac{3k}{m_2}$,

$$\begin{cases}\ddot{\theta_2} = -\omega_0^2\theta_2 - \omega_2^2\left(\theta_2 - \theta_1\right)\\ \ddot{\theta_1} = -\omega_0^2\theta_1 - \omega_1^2\left(\theta_1 - \theta_2\right)\end{cases} \tag{1}$$

2. On cherche des solutions oscillantes de pulsation ω, avec $\ddot{\theta_2} = -\omega^2\theta_2$ et $\ddot{\theta_1} = -\omega^2\theta_1$.

$$\begin{cases}\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_2^2\right)\theta_2 + \omega_2^2\theta_1 = 0\\ \omega_1^2\theta_2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_1^2\right)\theta_1 = 0\end{cases}$$

D'où pour qu'il y ait des solutions non identiquement nulles

$$\begin{vmatrix}\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_2^2 & \omega_2^2\\ \omega_1^2 & \omega^2 - \omega_0^2 - \omega_1^2\end{vmatrix} = 0$$

Cas $\omega_2 = \omega_1$

$\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_1^2 = \pm\omega_1^2$, soit $\omega^2 = \omega_0^2$ ou $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_1^2$.

Pour $\omega = \omega_0$, $\theta_1 = \theta_2$, les deux pendules oscillent en phase, la distance entre les deux extrémités restant égale à ℓ_0.

Pour $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_1^2$, $\theta_1 = -\theta_2$ les deux pendules oscillent en opposition de phase.

En faisant la somme et la différence des équations du système (1), il apparait que la somme s et la différence d obéissent à des équations

$$\begin{cases}\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0\\ \ddot{d} + \left(\omega_0^2 + 2\omega_1^2\right)d = 0\end{cases} \quad \text{et avec} \begin{cases}\theta_1 = \frac{1}{2}\left(s + d\right)\\ \theta_2 = \frac{1}{2}\left(s - d\right)\end{cases}$$, le résultat est démontré.