En référentiel terrestre supposé galiléen, les forces exercées sur M sont :

son poids, la réaction de composante normale au cône $\overrightarrow{R_N}$ et de composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$, la tension du fil $\overrightarrow{T}$. Le point glisse sur le cône : d'après les lois de Coulomb $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| = \mu \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$ et $\overrightarrow{R_T}.\overrightarrow{v} < 0$.

On utilise la base cylindrique $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}$, l'axe (Oz) étant l'axe vertical ascendant du cône avec $r = \ell \sin\alpha$.

$\overrightarrow{R_N} = R_N \left[\cos\alpha \overrightarrow{u_r} + \sin\alpha \overrightarrow{u_z}\right]$; $\overrightarrow{R_T} = -R_T \overrightarrow{u_\theta} = -\mu R_N \overrightarrow{u_\theta}$; $\overrightarrow{T} = T\left[\cos\alpha \overrightarrow{u_z} - \sin\alpha \overrightarrow{u_r}\right]$

En projetant le pfd :

$m\left[-r\dot{\theta}^2\right] = R_N \cos\alpha - T\sin\alpha$

$m\left[r\ddot{\theta}\right] = -\mu R_N$

$0 = -mg + T\cos\alpha + R_N \sin\alpha$

En remplaçant la troisième éq. dans la première : $-mr\dot{\theta}^2 = \frac{R_N}{\cos\alpha} - mg\tan\alpha$. Puis

$mr\ddot{\theta} = -\mu\cos\alpha\left[mg\tan\alpha - mr\dot{\theta}^2\right]$, soit

$$\ddot{\theta} = \mu\cos\alpha\left[\dot{\theta}^2 - \frac{g}{\ell\cos\alpha}\right]$$

Posons $u = \dot{\theta}$, $\ddot{u} = \mu\cos\alpha\left[u^2 - \frac{g}{\ell\cos\alpha}\right]$. En séparant les variables avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\alpha}}$

$\frac{du}{\omega_0^2 - u^2} = -\mu\cos\alpha dt \iff \frac{1}{\omega_0+u} + \frac{1}{\omega_0-u} = -2\omega_0\mu\cos\alpha dt$, soit $\ln\left(\left|\frac{\omega_0+u}{\omega_0-u}\right|\right) = -2\omega_0\mu t\cos\alpha + C$. La constante C s'obtient avec la CI.

$$\ln\left(\left|\frac{\omega_0+u}{\omega_0-u}\right|\right) = -2\omega_0\mu t\cos\alpha + \ln\left(\left|\frac{\omega_0+v_0/r}{\omega_0-v_0/r}\right|\right)$$

Le mouvement s'arrête pour $u = 0$, soit $t = \frac{1}{2\omega_0\mu\cos\alpha}\ln\left(\left|\frac{\sqrt{\frac{g}{\ell\cos\alpha}}+\frac{v_0}{\ell\sin\alpha}}{\sqrt{\frac{g}{\ell\cos\alpha}}-\frac{v_0}{\ell\sin\alpha}}\right|\right)$

Cas particulier : on voit que $t \to \infty$ quand le dénominateur du ln s'annule. En reportant dans l'expression de R_N, on voit que pour cette valeur particulière de la vitesse, la réaction normale et donc aussi le frottement s'annule. Pratiquement, cela correspond à un temps très long avant l'arrêt.