1. Dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ d'axe fixe (Oz) et tournant avec l'anneau, les actions exercées sur la perle sont : son poids $m\overrightarrow{g}$, la réaction du cerceau $\overrightarrow{N}$ normale au cerceau, la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}} = m\omega^2\overrightarrow{OM} = m\omega^2 R\left[(1+\cos\alpha)\overrightarrow{u_r} - \sin\alpha\overrightarrow{u_\alpha}\right]$, la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}} = -2m\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v(M)_{R'}} = -2m\omega R\dot{\alpha}\overrightarrow{u_z}\wedge\overrightarrow{u_\alpha} = 2m\omega R\dot{\alpha}\overrightarrow{u_r}$

Dans R', M a un mouvement circulaire, et $\overrightarrow{a}(M) = -R\dot{\alpha}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\alpha}\overrightarrow{u_\alpha}$. En projetant le pfd sur $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\alpha}, \overrightarrow{u_z}$:

$$\begin{cases} -mR\dot{\alpha}^2 = N_r + 2m\omega R\dot{\alpha} + m\omega^2 R\left(1+\cos\alpha\right) \\ mR\ddot{\alpha} = -m\omega^2 R\sin\alpha \\ 0 = N_z - mg \end{cases}$$

D'où l'équation vérifiée par α :

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2\sin\alpha$$

2. $\ddot{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ou π.

Pour $\alpha \ll 1$, $\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$, on obtient des oscillations autour de 0, la position $\alpha = 0$ est stable.

Pour $\alpha = \pi + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$, $\ddot{\varepsilon} - \omega^2\varepsilon = 0$, la position $\alpha = \pi$ est instable.

3. La réaction et la force de Coriolis ne travaillent pas. Le poids non plus puisque le mouvement est horizontal. La force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2\left[\left(1+\cos\alpha\right)^2 + \sin^2\alpha\right] = m\omega^2 R^2\left[1+\cos\alpha\right]$.

$E_p' = -m\omega^2 R^2\sin\alpha$ s'annule pour 0 et π qui sont les positions d'équilibre.

$E_p'' = m\omega^2 R^2\cos\alpha$ est positive pour la position d'équilibre stable, soit $\alpha = 0$, et négative pour la position instable $\alpha = \pi$.