

---

### Etude générale

1. L'ensemble est en équilibre, la somme des forces est nulle. Par symétrie,  $R_y(0) = -R_y(\pi) = -F_A$  et  $R_z(0) = R_z(\pi)$

Projection sur la verticale :  $-Mg + 2R_z = 0$ , d'où  $R_z(0) = R_z(\pi) = Mg/2$

2. Système = pilier P, i.e. toute la partie de la voûte repérée par un angle inférieur à  $\theta$ .

Actions exercées : force exercée par le voussoir en  $\theta$  :  $-\vec{R}(\theta)$ , le poids  $M\vec{g}\frac{\theta}{\pi}$ , la réaction du sol  $Mg/2\vec{u}_z - F_A\vec{u}_y$ . La somme des forces est nulle, d'où

$$\vec{R}(\theta) = Mg\left(\frac{1}{2} - \frac{\theta}{\pi}\right)\vec{u}_z - F_A\vec{u}_y \quad (1)$$

3. Les forces en  $\theta = \pi/2$  sont horizontales, normal. Il faut que .

### Etude de la partie droite

1. Les forces exercées sont le poids  $M\vec{g}/2$ , la réaction du sol  $Mg/2\vec{u}_z - F_A\vec{u}_y$ , la force exercée par la partie gauche  $F_A\vec{u}_y$ .

2. Considérons que les voussoirs sont de faible épaisseur (elle n'est pas donnée).  $\frac{M}{2}x_G = \int_0^{\pi/2} \frac{M}{2\pi R} R \cos \theta \cdot R d\theta = \frac{MR}{2\pi}$ , d'où  $x_G = y_G = \frac{R}{\pi}$ .

3. On peut exprimer le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe, par exemple en  $A$ , extrémité de la voûte en  $\theta = 0$ , en projection sur l'axe  $(Ax)$ . Les seuls moments non nuls sont ceux du poids et de la force en  $\theta = \pi/2$ .

$RF_A - \frac{M}{2}g(y_A - y_G) = 0 \iff RF_A - \frac{M}{2}gR\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) = 0$ , d'où

$$F_A = Mg\frac{\pi - 1}{2\pi}$$

### Étude de l'équilibre des voussoirs

1. Cours

2. Pour que l'équilibre soit possible il faut  $|R_r(\theta)| < \mu |R_\theta(\theta)|$ .

Avec (1),  $R_r = R_y \cos \theta + R_z \sin \theta$  et  $R_\theta = R_z \cos \theta - R_y \sin \theta$

soit

$$|-(\pi - 1) \cos \theta + (\pi - \theta) \sin \theta| < \mu |(\pi - \theta) \cos \theta + (\pi - 1) \sin \theta|$$

Par ailleurs  $F_A < \mu_0 Mg/2 \implies$

$$\frac{\pi - 1}{2\pi} < \mu_0$$