1. En référentiel terrestre supposé galiléen, la tige (avec A) est soumise au poids de A et au couple de rappel. Le TMC appliqué à la tige et projeté sur (Bx) donne :

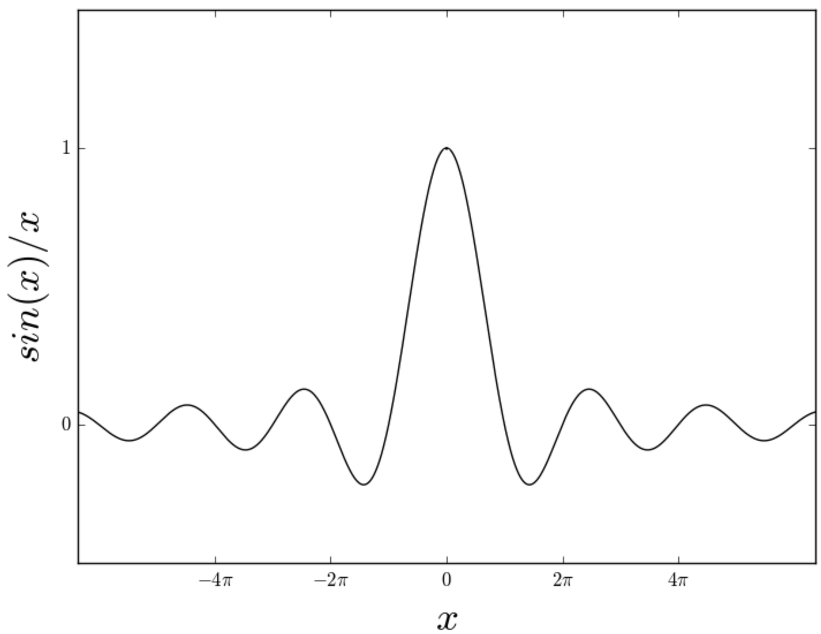
$mL^2\ddot{\theta} = -C\theta + mLg\sin\theta$

2. Pour θ petit , $mL^2\ddot{\theta} = (-C + mLg)\,\theta$. La solution $\theta = 0$ est une position d'équilibre, qui n'est stable que si $C > mLg$. Dans ce cas les solutions sont sinusoïdales . Sinon les solutions sont sommes d'exponentielles réelles.

3. $dE_p = -\overrightarrow{C}.d\theta\overrightarrow{u_x} = d\left(\frac{1}{2}k\theta^2\right)$, $E_p = \frac{1}{2}k\theta^2$ à une constante près.

$E_{p,tot} = \frac{1}{2}k\theta^2 + mgL\cos\theta$

4. Les positions d'équilibre vérifient $E'_{p,tot} = 0 \Longleftrightarrow k\theta = mgL\sin\theta$. Soit $\theta = \theta_1 = 0$, soit $\theta = \pm\theta_2$ avec $\frac{sin(\theta_2)}{\theta_2} = \frac{k}{mLg}$. Pour que ces dernières solutions existent il est nécessaire que $\frac{k}{mLg} < 1$, qui est la valeur maximale atteinte par $\frac{sin(x)}{x}$.



5. $E'_{p,tot} = k\theta - mgL\sin\theta$ et $E''_{p,tot} = k - mgL\cos\theta$.

Pour $\frac{k}{mLg} \geq 1$, seule la solution $\theta_1 = 0$ existe et elle est stable car $E''_{p,tot} > 0$.

Pour $\frac{k}{mLg} < 1$, la solution $\theta_1 = 0$ existe est instable car $E''_{p,tot} < 0$. $E''_{p,tot} = 0$ pour $k = mgL\cos\theta_3$. En traçant $y_1 = \cos\theta$ et $y_2 = \sin(\theta)/\theta$, il apparait que $\theta_2 > \theta_3$ et donc $E''_{p,tot}(\pm\theta_2) > 0$, ces solutions sont des équlibres stables.