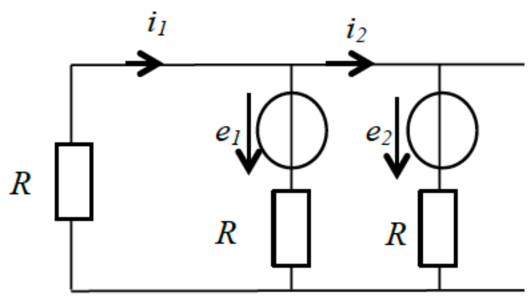
1. Dans ce cas, il y a un circuit fermé par les barres T_0 et T_1. Le flux du champ magnétique à travers le circuit, orienté par la flêche indiquant le courant, est $\phi = -Bax_1$. La fem est donc

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = Bav_1$$

.

2. Pour $n = 2$



Equations mécaniques :

On applique en référentiel supposé galiléen le théorème du centre de masse (TCM) à T_1 :

$m\frac{dv_1}{dt} = -(i_1 - i_2)\,Ba$.

Les équations électriques sont :

$Ri_1 + R(i_1 - i_2) - e_1 = 0$ soit $2Ri_1 - Ri_2 = av_1B$.

$Ri_1 + Ri_2 - e_2 = 0$, soit $R(i_1 + i_2) = av_2B$.

On déduit des deux dernières équations $i_1 = \frac{aB(v_1+v_2)}{3R}$ et $i_2 = \frac{aB(-v_1+2v_2)}{3R}$

En remplaçant dans les équations mécaniques :

$\frac{dv_1}{dt} = \frac{a^2B^2(-2v_1+v_2)}{3Rm} = \frac{-2v_1+v_0}{3\tau}$

D'où

$$v_1(t) = v_0\left[1 - \exp\left(-2t/3\tau\right)\right]/2.$$

En régime permanent les tiges se déplacent à vitesse constante. La première se déplace à une vitesse moitié de la seconde.

3. On applique le TCM aux 2 tiges mobiles

$m\frac{dv_1}{dt} = -(i_1 - i_2)\,Ba$

$m\frac{dv_2}{dt} = -(i_2 - i_3)\,Ba$.

Les équations électriques sont :

$Ri_1 + R(i_1 - i_2) - e_1 = 0$ soit $2Ri_1 - Ri_2 = av_1B$

$Ri_1 + R(i_2 - i_3) - e_2 = 0$, soit $R(i_1 + i_2 - i_3) = av_2B$

$Ri_1 + Ri_3 - e_3 = 0$, soit $R(i_1 + i_3) = av_0B$.

On déduit des équations électriques en les sommant $i_1 = \frac{aB}{4R}(v_1 + v_2 + v_0)$, puis $i_2 = \frac{aB}{2R}(v_2 + v_0 - v_1)$ et $i_3 = \frac{aB}{4R}(3v_0 - v_1 - v_2)$.

En remplaçant dans les équations mécaniques :

$m\frac{dv_1}{dt} = -(i_1 - i_2)\,Ba = \frac{a^2B^2}{4R}(-3v_1 + v_2 + v_0)$

$m\frac{dv_2}{dt} = -(i_2 - i_3)\,Ba = \frac{a^2B^2}{4R}(v_1 - 3v_2 + v_0)$

Les deux vitesses jouent des rôles équivalents et comme elles ont les mêmes conditions initiales, elles sont égales à chaque instant. En particulier :

$\frac{dv_1}{dt} + \frac{a^2B^2}{4Rm}(2v_1 - v_0) = 0$, d'où D'où

$$v_1(t) = v_0 \left[1 - \exp\left(-t/2\tau\right)\right]/2.$$

On remarque que comme dans le cas précédent, les deux vitesses identiques tendent exponentiellement vers $v_0/2$. Le temps de décroissance est plus court pour 3 tiges que pour 2.

4. Dans le cas de n tiges, les équations électriques sont :

$Ri_1 + R(i_k - i_{k+1}) - e_k = 0$, soit $R\left(i_1 + i_k - i_{k+1}\right) = av_kB$ pour $1 \leq k \leq n-1$

$Ri_1 + Ri_n - e_n = 0$, soit $R\left(i_1 + i_n\right) = av_0B$.

Les équations mécaniques sont

$m\frac{dv_k}{dt} = -\left(i_k - i_{k+1}\right)Ba$ pour $1 \leq k \leq n-1$, soit

$m\frac{dv_k}{dt} = -\left(i_k - i_{k+1}\right)Ba = -\left[aB/Rv_k - i_1\right]Ba$.

La même équation est vérifiée par tous les v_k qui sont donc identiques. En remplaçant dans l'équation $R\left(i_1 + i_k - i_{k+1}\right) = av_kB$, on en déduit $Ri_1 = av_kB$. Par ailleurs on a vu $R\left(i_1 + i_n\right) = av_0B$ et

en sommant toutes les équations électriques $R\left(n+1\right)i_1 = e_n + (n-1)e_1 = av_0B + (n-1)av_kB$, soit $\left(n+1\right)av_kB = av_0B + (n-1)av_kB$, soit

$$v_k = v_0/2.$$