a. Il y a deux solutions pour répondre à cette question classique, mais calculatoire : soit on calcule l'énergie de formation de l'astre en calculant le travail nécessaire pour former successivement des couronnes concentriques en apportant les masses de l'infini, soit on utilise la densité d'energie gravitationnelle $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4\pi\mathcal{G}}\right)g^2$ (par analogie avec la densité d'énergie électrostatique $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$) qu'on intègre dans tout l'espace.

Utilisons la seconde méthode : on considère la boule de rayon R (déja totalement constituée) de masse totale M. On cherche le champ gravitationnel $\overrightarrow{g}$ partout dans l'espace, et on calcule $E_{grav} = \iiint_{toutl'espace} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4\pi\mathcal{G}}\right)g^2 d^3\tau$

- Détermination de $\overrightarrow{g}(P)$ en un point P quelconque. On se place en coorodonnées sphériques (r,θ,φ).

Tout plan contenant le centre O et M est plan de symétrie de la distribution de masse, donc $\overrightarrow{g}(P) = g(P)\overrightarrow{u_r}$

Il y a invariance du problème par rotation d'angle quelconque, donc $g(P) = g(r)$

On applique le théorème de Gauss gravitationnel en utilisant comme surface fermée une sphére de rayon r.

$\oiint \overrightarrow{g}.\overrightarrow{d^2S} = g(r).4\pi r^2 = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$

Pour $r \leq R$ $M_{int} = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$, d'où $\overrightarrow{g}(M) = -\mathcal{G}M\frac{r}{R^3}\overrightarrow{u}_r$

Pour $r \geq R$ $M_{int} = M$, d'où $\overrightarrow{g}(M) = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\overrightarrow{u}_r$

- $E_{grav} = \iiint_{toutl'espace} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4\pi\mathcal{G}}\right)g^2 d^3\tau = \int_{r=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\mathcal{G}}\right)g^2r^2dr = -\frac{\mathcal{G}M^2}{2}\left[\int_{r=0}^{R}\frac{r^4}{R^6}dr + \int_{r=R}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr\right]$

$E_{grav} = -\frac{\mathcal{G}M^2}{2\mathcal{R}}\left[\frac{1}{5}+1\right] = -\frac{3\mathcal{G}M^2}{5R}$

Chaque particule a une énergie cinétique $e_c = \frac{3}{2}k_BT$. Il y a $N = M/m_p$ protons et N électrons. D'où une énergie cinétique totale $E_c = \frac{3M}{m_p}k_BT$.

En écrivant la conservation de l'énergie $E_{grav} + E_c = 0$, d'où

$$T = \frac{\mathcal{G}Mm_p}{5Rk_B}$$

A.N. $T = 2.10^7$K. Cela correspond bien à l'ordre de grandeur de la température au centre du Soleil. Il manquerait ici l'évaluation des pertes énergétiques par rayonnement pour une comparaison correcte).

b. Il existe une pression au sein du nuage, due à l'agitation thermique. On pourrait par exemple utiliser la loi de l'hydrostatique pour la déterminer.

Dans le nuage - étoile, il y a nécessairement des réactions nucléaires qui s'instaurent dès lors que la densité particulaire devient très importante. C'est ce qui est à l'origine de l'énergie dégagée par les étoiles.

c. Il y a $N = M/m_p$ protons et N électrons, donc le volume moyen occupé par l'ensemble d'un proton et d'un neutron est $\frac{4}{3}\frac{\pi R^3}{N} = \frac{4}{3}\frac{\pi R^3 m_p}{M}$.

La relation d'Heisenberg s'exprime pour chaque coordonnée sous la forme $\Delta x_i.\Delta p_i \geq \hbar/2$. L'énergie cinétique est $e_c = \sum_i \frac{p_{x_i}^2}{2m}$ où chaque $\left\langle p_{x_i}^2\right\rangle \geq \left(\Delta p_{x_i}\right)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4a^2}$. D'où $e_c \geq \frac{3\hbar^2}{8ma^2}$. On voit que la contribution essentielle vient paradoxalement de sparticules les plus légères, c'est-à-dire les électrons. Dans la suite on ne conserve que ces contributions électroniques.

$E_c \geq Ne_c = N\frac{3\hbar^2}{8m_e a^2} = N\frac{3\hbar^2}{8m_e}\left(\frac{3M}{4\pi R^3 m_p}\right)^{2/3} = \left(\frac{M}{m_p}\right)^{5/3}\frac{3\hbar^2}{8m_e R^2}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}$

On remarque qu'il n'y a pas extensivité de l'énergie cinétique (dépendance en $N^{5/3}$).

Finalement l'énergie totale minimale est donnée par :

$E = \left(\frac{M}{m_p}\right)^{5/3} \frac{3\hbar^2}{8m_e R^2} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} - \frac{3\mathcal{G}M^2}{5R}$

Le minimum est obtenu pour $R_m = \frac{10\hbar^2}{3\mathcal{G}M^{1/3}m_p^{5/3}m_e} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}$.

Pour une masse égale à celle du Soleil, on trouve un rayon de l'ordre de celui de la Terre.