

# Mécanique du point (révisions de Sup)

**Henry Poincaré** Nancy 1854-Paris 1912

Polytechnicien et ingénieur des Mines, il se consacre surtout aux Mathématiques. Professeur à Caen, puis à Paris, il entre à trente-trois ans à l'Académie des Sciences, puis en 1908 à l'Académie Française. Ses contributions en physique mathématique sont essentielles. En mécanique céleste, il étudie particulièrement les systèmes à trois corps, et plus généralement les systèmes dynamiques (études qui ont été reprises avec la théorie du chaos déterministe). Il s'intéresse également à l'électrodynamique des corps en mouvement: en affirmant que les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen, il introduit la transformation de Lorentz, base de la relativité restreinte dont la théorie sera publiée par Einstein quelques mois plus tard.

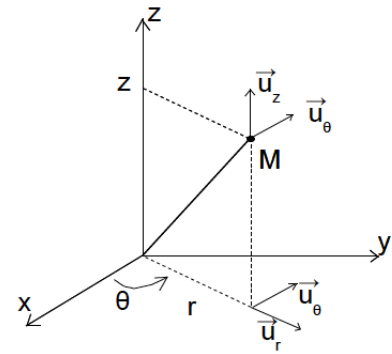
La Science et l'Hypothèse, collection Champs, Flammarion

## I. Cinématique

Dans un référentiel R muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

En coordonnées cartésiennes  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

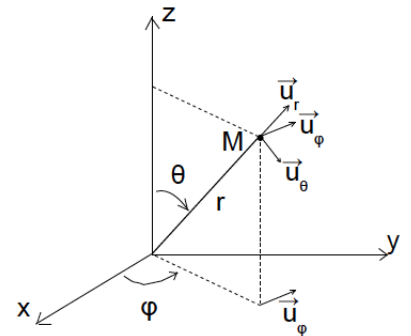
$$d\vec{r} = d(\vec{OM}) = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$



En coordonnées cylindriques  $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$

$$d\vec{r} = d(\vec{OM}) = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$$

$r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < \infty$



En coordonnées sphériques  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$

$$d\vec{r} = d(\vec{OM}) = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\phi\vec{u}_\phi$$

$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$

### I.1. Vitesse $\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

En coordonnées cartésiennes  $\vec{v}(M) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

En coordonnées cylindriques  $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k}$

### I.2. Accélération $\vec{a}(M) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$

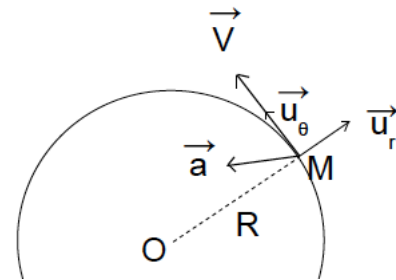
En coordonnées cartésiennes  $\vec{a}(M) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

En coordonnées cylindriques  $\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$

A savoir par coeur:

pour un mouvement circulaire:  $\vec{v}(M) = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et  $\vec{a}(M) = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + \dot{v}\vec{u}_\theta$

pour un mouvement circulaire uniforme:  $\vec{a}(M) = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$



### I.3. Portrait de phase

Dans un problème à une dimension x, le portrait de phase est la courbe décrivant les variations de  $\dot{x}$  en fonction de x. On retient que:

Deux "trajectoires" dans l'espace des phases ne peuvent pas se couper (des mêmes conditions initiales donnent une évolution identique)

Une trajectoire fermée dans l'espace des phases traduit un mouvement périodique.

Un système dissipatif se traduit par une contraction des aires dans l'espace des phases: un ensemble de conditions initiales contenues dans un domaine d'aire A dans l'espace des phases voit son aire diminuer au cours du temps.

Il existe des points ou des trajectoires qui sont des attracteurs : toute condition initiale conduit asymptotiquement vers cet attracteur.

## II. Lois de la dynamique

### II.1. Référentiels galiléens

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la loi de l'inertie est vérifiée: un point matériel isolé (c'est-à-dire sur lequel aucune action n'est exercée) est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Les référentiels galiléens sont par conséquent en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres.

En réalité on assimile souvent un référentiel non galiléen tel le référentiel terrestre à un référentiel galiléen car on peut le considérer comme galiléen pour l'expérience étudiée d'extension spatiale limitée et pendant la durée de l'expérience.

Quelques référentiels (de moins en moins "galiléens"):

- Référentiel héliocentrique (ou de Kepler): le soleil est un point fixe, les trois axes pointent vers trois étoiles "fixes"
- Référentiel géocentrique: le centre de masse de la terre est un point fixe, trois axes fixes pointent vers les trois étoiles fixes
- Référentiel terrestre: lié à un point de la surface de la terre.

### II.2. Forces

Les actions entre points matériels peuvent être décrites par des forces. Une force est un vecteur. Le point d'application de la force est le point matériel sur lequel elle s'exerce.

Il y a invariance de la force par changement de référentiel.

La loi des actions réciproques indique que la force  $\vec{f}_{12}$  exercée par une particule  $M_1$  sur une particule  $M_2$  est l'opposée de la force  $\vec{f}_{21}$  exercée par une particule  $M_2$  sur une particule  $M_1$  et  $\vec{f}_{12} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{0}$

### II.3. Seconde loi de Newton ou loi fondamentale de la dynamique

**II.3.a. Définition** Quantité de mouvement d'un point matériel :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

**II.3.b. La loi fondamentale de la dynamique (ou loi de la quantité de mouvement)** Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$ , est égale à la somme des forces qui lui sont exercées.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a} = \sum_i \vec{f}_i$$

### II.4. Théorème du moment cinétique

**II.4.a. Définitions** - Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point  $O$ :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}$$

- Moment cinétique par rapport à un axe  $\Delta$  contenant le point  $O$  et orienté par  $\vec{u}_\Delta$

$$\sigma_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

- Moment par rapport à un point  $O$  d'une force s'exerçant sur un point  $M$  :

$$\overrightarrow{M}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$$

Le moment donne la direction et le sens de l'effet de rotation de  $M$  autour de  $O$  dû à la force  $\vec{f}$ . Sa norme est le produit de la norme de la force par le bras de levier (distance entre  $O$  et la droite support de la force)

- Moment par rapport à un axe  $\Delta$  contenant le point  $O$  et orienté par  $\vec{u}_\Delta$  d'une force s'exerçant sur un point  $M$

$$M_\Delta(\vec{f}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

**II.4.b. Théorème du moment cinétique** Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel  $M$  par rapport à un point  $O$  fixe est égale à la somme des moments des forces exercées sur  $M$  calculés par rapport à  $O$ .

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_i$$

On en déduit le théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe:

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel  $M$  par rapport à un axe orienté  $\Delta$  fixe est égale à la somme des moments des forces exercées sur  $M$  calculés par rapport à  $\Delta$ .

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \sum_i M_\Delta(\vec{f}_i)$$

## II.5. Théorème de l'énergie cinétique

**II.5.a. Définitions (dépendantes du référentiel choisi)** Energie cinétique d'un point matériel :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Puissance instantanée d'une force

$$P = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

Travail d'une force pour un déplacement élémentaire  $\overrightarrow{dOM}$ :

$$\delta W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = \vec{f} \cdot \vec{v} dt$$

Travail d'une force pour un déplacement du point I au point F :  $W = \int_I^F \vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} \cdot \vec{v} dt$

**II.5.b. Théorème de l'énergie cinétique** Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces exercées sur ce point entre les deux instants.

### II.5.c. Cas d'une particule soumise à une force qui dérive d'une énergie potentielle

- $\vec{f}$  dérive d'une énergie potentielle ou est une force conservative s'il existe  $E_p$ , fonction des variables d'espace telle que  $\delta W = -dE_p$ . L'énergie potentielle est définie à une constante près.

Pour un déplacement du point I au point F:  $W = -\Delta E_p = E_p(I) - E_p(F)$

Propriété:  $\vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = -dE_p \Rightarrow$

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\nabla E_p} = -\overrightarrow{\text{grad}E_p}$$

avec

-en coordonnées cartésiennes:  $\overrightarrow{\nabla E_p} = \overrightarrow{\text{grad}E_p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial x} \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix}$

- en coordonnées cylindriques ou sphériques, pour  $E_p = f(r)$ ,  $\overrightarrow{\nabla E_p} = \overrightarrow{\text{grad}E_p} = \frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r$

Exemples à savoir sans hésiter (particule de masse  $m$ , de charge  $q$ ) :

- Énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme) : pour  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$  (axe  $z$  ascendant),  $E_p = mgz$

- Énergie potentielle de gravitation créé par un astre à symétrie sphérique de masse  $M$  en  $O$ : pour  $\vec{f} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r$ ,  $E_p = -G\frac{mM}{r}$

- Énergie potentielle élastique: pour  $\vec{f} = -kx\vec{u}_x$ ,  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$
- Énergie potentielle électrostatique (cas d'un champ uniforme): pour  $\vec{f} = qE_0\vec{u}_x$ ,  $E_p = qV = -qE_0x$
- Énergie potentielle électrostatique (cas du champ créé par une charge ponctuelle Q en O): pour  $\vec{f} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ ,  $E_p = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à une force conservative est égale à la chute d'énergie potentielle

- On définit l'énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p$$

Une particule soumise à une force conservative a une énergie mécanique constante.

- Pour une particule soumise à des forces conservatives qui dérivent d'une énergie potentielle totale  $E_p$  et à des forces non conservatives, la variation d'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p$  est égal au travail des forces non conservatives:

$$\Delta E_m = W_{n.c.}$$

### III. Rappels de quelques cas archi-classiques

#### III.1. Oscillateurs (voir poly spécifique)

**Ex1.** En référentiel terrestre supposé galiléen, on considère un point matériel M de masse m accroché à une extrémité d'un fil rigide de masse négligeable, de longueur l et dont l'autre extrémité est lié à un axe horizontal fixe par une liaison parfaite. On s'intéresse aux mouvements dans un plan vertical et on néglige tout frottement.

1. Faire le bilan des actions exercées sur M. Déterminer l'équation du mouvement de M en appliquant la loi de la dynamique, puis en appliquant la loi du moment cinétique, puis en utilisant un raisonnement énergétique.
2. En utilisant une représentation graphique de l'énergie mécanique, faire apparaître les différents types de mouvement.
3. Dans la limite des petites oscillations, déterminer l'évolution du point matériel sachant qu'à  $t = 0$ , on l'écarte de la verticale d'un angle  $\alpha_0$  et qu'on le lâche avec une vitesse initiale nulle.

**Ex2.** En référentiel terrestre supposé galiléen, on considère un point matériel M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable, de longueur au repos  $l_0$ , de raideur  $k$ . Le ressort, vertical, est suspendu par son autre extrémité  $O_1$  fixé à l'origine O. On néglige tout frottement et on s'intéresse aux mouvements verticaux de M selon l'axe (Oz).

1. Faire le bilan des actions exercées et déterminer l'équation du mouvement par la méthode de votre choix.
2. On tient compte d'une force de frottement fluide  $\vec{f} = -h\vec{v}$ . Déterminer le mouvement du point M.
3. Le point  $O_1$  n'est plus fixe, mais animé d'un mouvement de translation verticale sinusoïdale:  $z_1(t) = a\cos(\omega t)$ . Étudier le régime sinusoïdal forcé en présence de frottement fluide.

#### III.2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$ uniforme

La force de Lorentz exercée sur une particule de charge  $q$  de vitesse  $\vec{v}$ , placée dans un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$  est  $\vec{f}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

La puissance de la force de Laplace  $P = \vec{f}_L \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$ . La force magnétique ne travaille pas! un champ magnétique peut courber une trajectoire mais ne peut pas faire varier l'énergie cinétique d'une particule. En revanche un champ électrique permet de modifier l'énergie cinétique.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ  $\vec{E}$  uniforme : mouvement uniformément accéléré

Mouvement d'une particule chargée dans un champ  $\vec{B}$  uniforme : mouvement circulaire ou hélicoïdal. La norme de la vitesse reste constante puisque la force magnétique ne travaille pas.

**Ex3.** Deux plaques métalliques sont portées à des potentiels électriques différents: la cathode est au potentiel  $V = 0$ , et l'anode au potentiel  $V = U$ . Cette différence de potentiel crée un champ électrique. Des électrons de charge  $-e$  sont émis avec une énergie cinétique initiale négligeable par la cathode. Quelle est l'énergie cinétique acquise par un électron lorsqu'il atteint l'anode ?

**Ex 4.** Une particule M de masse m de charge q se trouve à  $t = 0$  en O avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x$  dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ . Quelle est la trajectoire de la particule? Donner ses caractéristiques. Déterminer les coordonnées de M au cours du temps.

La vitesse initiale de la particule comporte en fait une composante selon l'axe (Oz):  $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0z}\vec{u}_z$ . Qu'y a-t-il de changé? Quelle est la nouvelle trajectoire?

## IV. Mouvement à force centrale

### IV.1. Propriétés

Dans un référentiel galiléen, une particule soumise à une force centrale (c'est-à-dire dont le support passe par un point O fixe) vérifie les propriétés suivantes:

-son moment cinétique est constant  $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$

-sa trajectoire est plane (la particule est dans le plan passant par O et perpendiculaire à  $\vec{\sigma}_0$ .)

-elle suit la loi des aires (le rayon-vecteur  $\overrightarrow{OM}$  balaye des aires égales en des temps égaux:  $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{m} = \frac{C}{2}$ , en coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire). C est la constante des aires.

### IV.2. Cas d'une force centrale conservative

Les propriétés précédentes sont valables: le mouvement est plan et en coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire,  $\dot{\theta} = \frac{\sigma_0}{mr^2}$

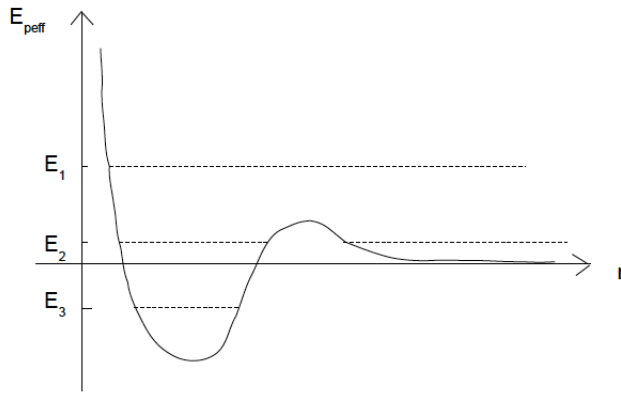
L'énergie mécanique du système est:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\sigma_0^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

On est ramené à l'étude du mouvement d'une particule mobile sur un axe, dont la position est repérée par r et soumise à l'énergie potentielle

$$E_{p,eff}(r) = \frac{\sigma_0^2}{2mr^2} + E_p(r)$$

Selon les conditions initiales qui déterminent la valeur de l'énergie mécanique, la valeur de r peut tendre vers l'infini ou non: on parle d'états libres ou de diffusion (mouvement en r non borné) ou d'états liés (mouvements en r borné).



Sur cet exemple:

un état d'énergie  $E_1$  est libre

un état d'énergie  $E_3$  est lié

un état d'énergie  $E_2$  est libre ou lié selon les conditions initiales

### IV.3. Forces newtoniennes

Il s'agit des forces de la forme

$$\vec{f} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r$$

telles les forces gravitationnelles  $\vec{f} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{u}_r$  ou électrostatiques  $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{u}_r$ .

- Ces forces sont centrales et conservatives. L'énergie potentielle associée est à une constante près :

$$E_p = \frac{k}{r}$$

- Les trajectoires sont des coniques : cercles et ellipses d'énergie négative, paraboles d'énergie nulle ou hyperboles d'énergie positive, dont O est un foyer et d'équation générale en coordonnées polaires (HP)

$$r = \frac{p}{1 \pm e \cos \theta}$$

$p$  est le paramètre et  $e$  l'excentricité.

- La constante des aires peut s'exprimer en fonction de la position d'approche minimale (ou maximale) et de la vitesse en ce point :  $C = r_{min} V_{max}$  (ou  $r_{max} V_{min}$ )

Démonstration :

Cas particulier des trajectoires elliptiques :  $0 < e < 1$  : de demi-grand axe  $a$ :

$$E_m = \frac{k}{2a}$$

Démonstration :

Lois de Kepler obtenues pour la force gravitationnelle appliquée aux planètes en considérant le soleil comme fixe :

1. Les planètes décrivent des ellipses dont le soleil est un foyer
2. Les trajectoires obéissent à la loi des aires
3. Le rapport  $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_{\odot}}{4\pi^2}$  est constant (a = demi grand-axe et T = période de révolution)

Remarques:

Les lois 1 et 3 sont approchées : elles supposent que la masse de la planète est négligeable devant celle du soleil. Une étude du système à deux corps (planète + soleil) permet d'apporter une correction).

Les lois peuvent être généralisées aux situations équivalentes (mouvement d'un satellite autour de sa planète)

La loi 3 se retrouve très facilement dans le cas d'un mouvement circulaire.

### Exercice 5: Satellite en mouvement circulaire

On étudie le mouvement d'un satellite sur une orbite circulaire autour de la Terre:

1. Montrer que le mouvement est uniforme et calculer sa période. Démontrer la troisième loi de Képler dans ce cas
2. Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire, ainsi que le plan de sa trajectoire.

La station spatiale internationale évolue à une altitude de 350 km. Quelle est sa période?

3. Déterminer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle d'un satellite sur sa trajectoire circulaire. Quelle est la relation entre les deux énergies (théorème du viriel)? Exprimer l'énergie mécanique du satellite.

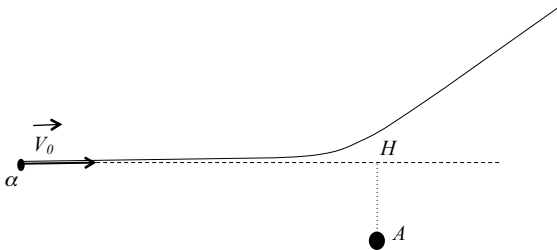
Quel est l'effet de frottements avec les hautes couches atmosphériques sur l'altitude d'un satellite?

4. Définir et calculer les deux vitesses cosmiques.

### Exercice 6 : Interaction newtonienne répulsive

L'expérience de Rutherford étudie la déviation de particules  $\alpha$  (noyaux d'Hélium) par des noyaux d'or, considérés comme fixes. Les conditions initiales de l'interaction entre une particule  $\alpha$  de masse  $m$  et un noyau d'or sont déterminées par la vitesse initiale  $\vec{V}_0$  de la particule  $\alpha$  à grande distance, et par la distance  $AH$  du noyau d'or  $A$  au support de cette vitesse. Cette distance notée  $b$ , est appelée paramètre d'impact.

Déterminer la distance de plus courte approche des deux noyaux.



Données : énergie de la particule  $\alpha$ ,  $E = 5 \text{ MeV}$  ; nombre de charge d'un noyau d'or  $Z = 79$  ; paramètre d'impact  $b = 6.10^{-15} \text{ m}$ .