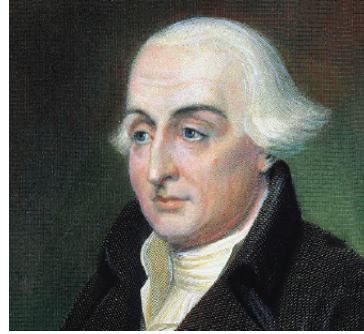


## Mécanique d'un système de points. Mécanique du solide



**Joseph Louis de Lagrange** (Giuseppe Lodovico de Lagrangia), Turin 1736 - Paris 1813

A 17 ans, il se lance dans les mathématiques et à 19 ans, définit dans sa correspondance avec Euler les fondements du calcul variationnel. Il devient professeur à l'école d'artillerie de Turin, puis il est appelé à l'académie de Berlin pour succéder à Euler par Frédéric II qui souhaitait avoir "le plus grand mathématicien d'Europe pour le plus grand roi d'Europe". Il publie quantité d'articles en mathématiques (calcul infinitésimal, théorie des nombres,..) et en physique (mécanique des fluides, mécanique céleste,..). Après la mort de Frédéric II, il part pour l'académie des sciences de Paris où il publie son livre "Mécanique analytique". En 1791 il oeuvre pour la commission des poids et mesures et est l'un des fondateurs de notre système métrique. Il n'est pas pris à parti pendant la révolution française mais il est très affecté par les exécutions autour de lui, en particulier celle de Lavoisier. En 1794, il devient le premier professeur d'analyse de l'Ecole polytechnique naissante, et à partir de 1795 enseigne également à l'ENS, créée également en 1794. Très apprécié de Napoléon, il devient membre du sénat avec Monge et Laplace et il est nommé comte de l'Empire. Il meurt à Paris. Il est inhumé au Panthéon. Son oeuvre est immense dans tde nombreux domaines des mathématiques et de la physique.

### I. Système de points

On généralise ici les résultats obtenus pour un point matériel à un système de  $n$  points matériels. On considère un ensemble de  $n$  points  $A_i$ , de masse  $m_i$ , sur chacun desquels s'exerce une force résultante  $\vec{f}_i$ . Cet ensemble est étudié dans un référentiel  $R$ .

#### I.1. Grandeurs cinétiques

- Centre d'inertie ou barycentre

O étant un point quelconque:

$$\vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{OA}_i}{\sum_i m_i}$$

→ Ex: Déterminer la position du centre d'inertie de deux points:  $A_1$  de masse  $3m$  et  $A_2$  de masse  $5m$

- Quantité de mouvement

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{V}_i = \left( \sum_i m_i \right) \vec{V}_G$$

La quantité de mouvement totale est égale à la quantité de mouvement qu'aurait le centre d'inertie affecté de toute la masse du système.

- Moment cinétique par rapport à un point

O étant un point quelconque. Le moment cinétique par rapport à O est:

$$\vec{L}_O = \sum_i (\vec{OA}_i \wedge m_i \vec{V}_i)$$

- Moment cinétique par rapport à un axe orienté  $\Delta$  passant par O

$$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$$

où  $\vec{u}_\Delta$  est le vecteur unitaire de l'axe( $\Delta$ )

- Énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i^2$$

## I.2. Dynamique

- Actions mécaniques

Chaque point  $A_i$  du système est soumis à une somme de forces  $\vec{f}_i$

Résultante

$$\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i$$

Moment résultant par rapport à O:

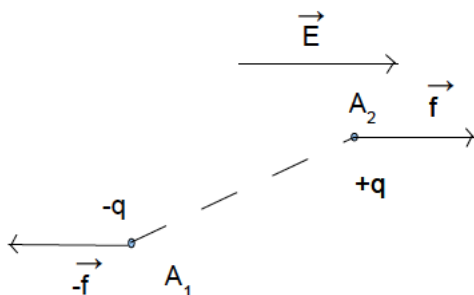
$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{OA}_i \wedge \vec{f}_i$$

D'après le principe de l'action et de la réaction, la résultante et le moment résultant des forces intérieures est nul.

Cas particuliers

- Un couple est une action mécanique dont la résultante est nulle. Son moment est le même par rapport à tout point.

Exemple: L'action exercée sur un système de deux points matériels soumis à des forces opposées est un couple. Dans le cas d'un dipôle constitué de deux charges opposées:  $-q$  en  $A_1$  et  $+q$  en  $A_2$  placées dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ , les forces  $\vec{f} = q\vec{E}$  et  $-\vec{f}$  se compensent. La somme de leurs moments par rapport à un point  $B$  quelconque est  $\vec{C} = B\vec{A}_1 \wedge q\vec{E} + B\vec{A}_2 \wedge (-q)\vec{E} = qA_1A_2 \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$



- Poids d'un système en référentiel terrestre:  $\vec{M}_O = \vec{OG} \wedge M\vec{g}$ . Tout se passe comme si le poids du système était une seule force appliquée au centre d'inertie.

De même, pour la force d'inertie calculée dans un référentiel non galiléen en translation par rapport à un référentiel galiléen  $\vec{M}_O = \vec{OG} \wedge (-M\vec{a}_e)$ . Tout se passe comme si la force d'inertie résultante s'appliquait au centre d'inertie.

- Loi de la quantité de mouvement

**Dans un référentiel galiléen, l'accélération du centre d'inertie d'un système de points est celle d'un point matériel affecté de la masse totale du système et qui serait soumis à la somme des forces extérieures exercées sur le système.**

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

- Loi du moment cinétique

**Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système de points calculé par rapport à un point O fixe est égale au moment résultant en O des forces extérieures.**

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{Oext}$$

- On en déduit le théorème du moment cinétique scalaire en projetant la relation sur un axe  $\Delta$  orienté contenant le point O :  $L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$  et  $M_{\Delta ext} = \vec{M}_{Oext} \cdot \vec{u}_\Delta$

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = M_{\Delta ext}$$

- Théorème de l'énergie cinétique

**Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un système de points entre deux instants est égale au travail des forces extérieures et intérieures appliquées entre ces deux instants.**

Attention, bien que la résultante des forces intérieures soit nulle, le travail des forces intérieures n'est pas nul en général.

**Tous les théorèmes établis en référentiel galiléen peuvent être généralisés**

**à condition de tenir compte des forces d'inertie**

### I.3. Référentiel barycentrique

Le référentiel barycentrique  $R^*$  est le référentiel en translation par rapport au référentiel d'étude supposé galiléen, dans lequel le centre d'inertie du système est fixe.

Ce référentiel est ou non galiléen. Le centre d'inertie  $G$  est par construction un point fixe de ce référentiel. Il peut être utile d'utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à  $G$  dans  $R^*$ . En effet, le moment de la force d'inertie d'entraînement est nul par rapport à  $G$  est nul dans  $R^*$ .

Démonstration :

### I.4. Cas particulier d'un système isolé de deux points (HP, voir exercice)

Soit un système isolé de deux points  $A_1$  et  $A_2$ , de masses  $m_1$  et  $m_2$ .

- Mouvement du centre de masse  $G$

Le système étant isolé, la somme des forces extérieures est nulle, le mouvement de  $G$  est rectiligne uniforme

- Mouvement relatif

Dans le référentiel barycentrique  $R^*$  (galiléen) de point fixe  $G$ , l'application du principe fondamental de la dynamique aux deux particules donne

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{GA_1}}{dt} = \overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}} \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{GA_2}}{dt} = \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} \end{cases} \implies \frac{d^2 \overrightarrow{A_1 A_2}}{dt} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}}$$

En posant la masse réduite du système  $\mu$  telle que  $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ , et en introduisant une particule fictive de masse  $\mu$  telle que  $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{A_1 A_2}$ , on se ramène à l'étude d'une particule soumise à une force centrale  $\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}}$ .

$$\begin{cases} \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA_2} - \overrightarrow{GA_1} \\ m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} = \vec{0} \end{cases} \implies \begin{cases} \overrightarrow{GA_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2} \overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GA_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \overrightarrow{GM} \end{cases}$$

La trajectoire de  $A_1$  et  $A_2$  dans  $R^*$  se déduit de celle de  $M$  par une homothétie de centre  $G$ .

## II. Solide

Un solide est un système matériel tel que la distance entre deux points quelconques reste constante au cours du temps. On étudie son mouvement dans le référentiel d'étude R.

### II.1. Grandeurs cinétiques

Un solide a au plus six degrés de liberté. Le programme se limite à deux cas :

#### II.1.a. Solide en translation dans R

Le solide S est en translation dans R: la position du solide à un instant t quelconque se déduit de sa position initiale par une translation. Tous les points du solide ont la même vitesse  $\vec{V}$ , qui peut dépendre du temps, dans R.

- La quantité de mouvement de S, de masse totale  $M$ , est

$$\vec{P} = M\vec{V}$$

- Le moment cinétique de S par rapport à un point fixe  $O$  dans R, est :

$$\vec{L}_O = \vec{OG} \wedge M\vec{V}$$

- L'énergie cinétique de S est:

$$E_c = \frac{1}{2}MV^2$$

#### II.1.b. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Le solide S est en rotation pure à la vitesse angulaire constante  $\Omega$  autour d'un axe fixe  $\Delta$  dans R: un point quelconque du solide a un mouvement circulaire de vitesse angulaire  $\Omega$  autour de cet axe. En introduisant un système de coordonnées cylindriques  $r, \theta, z$  associés à cet axe,  $\vec{V}(M) = r\Omega\vec{u}_\theta$ . Tous les points de l'axe  $\Delta$  ont une vitesse nulle.

Le centre d'inertie G est lui aussi animé d'un mouvement circulaire de vitesse angulaire  $\Omega(t)$  autour de  $\Delta$ .

On définit le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $\Delta$ :

$$J = \iiint_S r^2 dm = \iiint_S r^2 \rho d\tau$$

→ Ex: Quel est le moment d'inertie d'une roue creuse de masse M, de rayon R par rapport à son axe? Quel est le moment d'inertie d'une sphère de masse M, de rayon R par rapport à un de ses diamètres ?

- La quantité de mouvement de S, de masse totale  $M$ , est ( $a$  distance de  $G$  à l'axe de rotation)

$$\vec{P} = M\vec{V}(G) = M\Omega a\vec{u}_\theta$$

- Le moment cinétique scalaire de S par rapport à l'axe  $\Delta$  dans R, est :

$$L_\Delta = J_\Delta\Omega$$

Remarque: Le moment cinétique du solide en un point O de l'axe n'est en général pas colinéaire à l'axe de rotation.

- L'énergie cinétique de S est:

$$E_c = \frac{1}{2}J\Omega^2$$

## II.2. Dynamique du solide

Les théorèmes généraux vus pour les systèmes de points sont évidemment applicables avec les hypothèses d'un référentiel galiléen d'étude dont un point fixe est  $O$ .

Il faut tenir compte des actions de contact du solide. En particulier:

- Quand un solide glisse sans frottement sur un support, la résultante des actions de contact ou réaction est normale à la surface de contact (ou au plan tangent au solide et au support)

- Quand un solide tourne sans frottement autour d'un axe, la projection sur l'axe du moment des actions de contact est nulle (c'est le cas d'une liaison pivot parfaite ou idéale)

- Loi de la quantité de mouvement

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

- Loi du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{O_{ext}}$$

La loi du moment cinétique s'écrit sous forme scalaire par projection sur l'axe de rotation.

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_z$$

avec  $M_z = \vec{M}_{O_{ext}} \cdot \vec{u}_z$

- Loi de l'énergie cinétique

Pour un solide indéformable, le travail des forces intérieures est nul. Donc dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un solide entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces extérieures exercées entre ces deux instants.

Pour un solide dont l'élément de volume  $d\tau$  est soumis à une force  $\vec{f}(\vec{M})d\tau$ , le travail des forces  $P = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{v}(\vec{M})d\tau$

- Pour un solide en translation,  $\vec{F}$  étant la résultante des forces:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

- Pour un solide en rotation pure autour de l'axe  $\Delta$  dont un point est  $O$ , étant le moment résultant en  $O$ :

$$P = \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_{O_{ext}} = \Omega M_\Delta$$

Dans ce dernier cas, le solide ne possédant qu'un degré de liberté, l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique suffit à déterminer complètement le problème.

Il pourra être utile d'exprimer la conservation de l'énergie mécanique dans le cas où les forces extérieures dérivent d'une énergie potentielle.

→ Ex: Établir l'équation du mouvement d'un pendule pesant mobile sans frottement autour d'un axe horizontal  $\Delta$ , de moment d'inertie  $J$  par rapport à  $\Delta$ . La distance du centre d'inertie à l'axe  $\Delta$  est  $a$ .

→ Ex: Un cylindre de moment d'inertie  $J$  peut tourner par rapport à son axe vertical. On note  $\alpha$  l'angle de rotation depuis sa position d'équilibre. Il est soumis de la part de son axe  $Oz$  à un couple de rappel  $\vec{C} = -k\alpha\vec{u}_z$  et à un couple de frottement fluide  $\vec{C}' = -h\dot{\alpha}\vec{u}_z$ ; Le cylindre est lancé avec une vitesse  $\omega_0$  en  $\alpha = 0$ . Étudier son mouvement

### III. Lois du frottement solide

On se limite au cas où  $S_1$  et  $S_2$  sont deux solides en **translation** l'un par rapport à l'autre. Les deux solides ont au moins un point de contact  $I$  à l'instant  $t$ .  $I$  est le point géométrique,  $I_1$  est le point de  $S_1$  coïncidant avec  $I$  à l'instant  $t$ ,  $I_2$  est le point de  $S_2$  coïncidant avec  $I$  à l'instant  $t$ .

#### III.1. Vitesse de glissement

La vitesse de glissement de  $S_1$  sur  $S_2$  est

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)$$

Par définition,  $\vec{v}_g$  est indépendante du référentiel choisi.  $\vec{v}_g$  est dans le plan tangent en  $I$  aux deux solides pour traduire le fait que les deux solides ne s'interpénètrent pas.

Le mouvement est dit sans glissement si  $\vec{v}_g = \vec{0}$ .

#### III.2. Lois de Coulomb pour le frottement solide

##### a. Cadre de l'étude

Les lois de Coulomb sont des lois empiriques qui s'appliquent dans le cas d'un contact sec entre un point matériel et un solide, ou bien dans le cas du contact entre deux solides. Dans ce dernier cas, la modélisation du contact entre les solides peut être un contact ponctuel, surfacique ou linéique. Si le contact est surfacique ou linéique, on modélise les actions de contact exercées par un solide sur l'autre par une seule force résultante ramenée en un point de cette surface (ou courbe).

La force de contact exercée par  $S_2$  sur  $S_1$ ,  $\vec{F}_{2/1}$  ( $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$ ) se décompose en une composante normale  $\vec{N}$  au plan tangent de contact, qui traduit l'impossibilité d'interpénétration des deux solides et une composante tangentielle  $\vec{T}$ , qui est la force de frottement. Cette force de frottement s'oppose au mouvement relatif des deux solides.

##### b. Les lois de Coulomb

- Cas du non glissement:  $\vec{v}_g = \vec{0}$  (frottement statique)

Alors tant qu'il y a non-glissement  $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$   $f_s$  est le coefficient statique de frottement.

- Cas du glissement:  $\vec{v}_{g1/2} \neq \vec{0}$  (frottement dynamique)

1.  $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0}$  et  $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$

2.  $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$   $f_d$  est le coefficient dynamique de frottement

#### III.3. Aspect énergétique

La puissance totale des actions de contact entre deux solides est:

$$P_{contact} = P_{S_1 \rightarrow S_2} + P_{S_2 \rightarrow S_1} = \vec{F}_{2/1} \cdot \vec{v}(I_1) + \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}(I_2) = \vec{T} \cdot (\vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)) = \vec{T} \cdot \vec{v}_g$$

Cette puissance est forcément négative d'après Coulomb

Dans le cas d'un solide ou point matériel en glissement sur un support fixe, cette puissance est prélevé à l'énergie mécanique du mobile, en général il y a ainsi freinage. De manière générale il y a dissipation d'énergie (ça chauffe!)