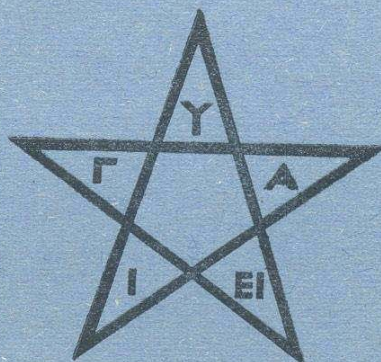


A R T U R O R E G H I N I

I NUMERI SACRI
NELLA TRADIZIONE
PITAGORICA MASSONICA



C A S A E D I T R I C E I G N I S

INDICE

NOTA DEL CURATORE	pag. III
PREMESSE	» 1
Cap. I - La Tetractis pitagorica ed il Delta massonico	» 12
Cap. II - La quaterna dei numeri composti o sintetici	» 25
Cap. III - La terna dei numeri primi dispari entro la decade	» 34
Cap. IV - Il pentalfa pitagorico e la stella fiammeggiante	» 45
Cap. V - Il numero e le sue potenze	» 59
Cap. VI - La tavola tripartita	» 71
Cap. VII - La Grande Opera e la Palingenesi	» 78



Arturo Reghini

NOTA DEL CURATORE

«Il matematico ed erudito fiorentino Arturo Reghini (1878-1946), alto dignitario della Massoneria prima del suo scioglimento ad opera del fascismo, fu il più noto esponente del neo-pitagorismo nel XX secolo e teorico dell'«Imperialismo Pagano». Amico di Giovanni Amendola e di Giovanni Papini, personaggio di punta della scapigliatura fiorentina all'epoca delle riviste «Leonardo», «Lacerba» e «La Voce», fu a sua volta fondatore delle riviste «Atanòr» (1924), «Ignis» (1925) e - con Julius Evola - «UR» (1927-1928). Alla sua opera sono legate la riproposizione della «magia colta», neo-platonica e rinascimentale, che contrappose al Cristianesimo come via d'accesso al divino, ed una critica radicale dell'occultismo e degli pseudo-esoterismi moderni. In collaborazione con René Guénon, auspicò la rinascita spirituale dell'Occidente attraverso la formazione di un'élite iniziatica nel quadro di un processo di rigenerazione della Massoneria, in cui vedeva un residuo «deviato» di un'antica organizzazione ermetico-pitagorica, d'origine pre-cristiana ed erede degli antichi Misteri. Polemista efficacissimo; fu interventista e fautore del primo fascismo, ma ruppe con Mussolini all'epoca del delitto Matteotti e con l'instaurazione della dittatura, ritirandosi nello studio della geometria e della matematica pitagoriche. Già in vita, sul suo conto s'era formata una corposa leggenda di «mago» e di facitore di prodigi, arricchitasi con il tempo di altre fantasiose aggiunte».

In questi termini, icastici ma sostanzialmente esatti, una recente biografia ⁽¹⁾ presentava la complessa figura di Arturo Reghini.

La storia della presente opera, l'ultima scritta da Reghini prima della morte, è stata brevemente narrata dal suo discepolo Giulio Parise nella «Nota» di presentazione ad un opuscolo postumo dello stesso Reghini ⁽²⁾: «Chiesi ad A. R. lo sviluppo filosofico ed iniziatico della opera sui numeri pitagorici; poté condurre a termine, in circa due mesi, un volume su *I numeri sacri nella tradizione pitagorica massonica...*».

¹ DI LUCA N. M., *Arturo Reghini. Un intellettuale neo-pitagorico tra Massoneria e Fascismo*, Atanòr, Roma, 2003.

² REGHINI A., *Considerazioni sul Rituale dell'apprendista libero muratore con una nota sulla vita e l'attività massonica dell'Autore di Giulio Parise*, Edizioni di Studi Iniziatici, Napoli, s.d. [1946].

Il libro fu finito di stampare il 20 gennaio 1947 «per i tipi dello stab. tip. S. Barbara di Ugo Pinnarò, Roma – Via Pompeo Magno, 29». Editore fu il già citato Parise, attraverso la Casa editrice Ignis, la medesima che nel 1935 aveva pubblicato lo studio reghiniano *Per la restituzione della geometria pitagorica*. Reghini era morto sei mesi prima, il 1° luglio 1946.

Nell'elaborazione del testo elettronico si è provveduto ad operare le correzioni indicate dall'Editore nell'*Errata Corrige* in allegato alla prima edizione del 1947, nonché quelle di errori di stampa individuati nel corso della trascrizione, come pure a rettificare talune (rarissime) imprecisioni bibliografiche sparse qua e là ed indubbiamente dovute alle particolari condizioni in cui Reghini si trovò a lavorare nell'immediato dopoguerra, senza la possibilità di effettuare gli opportuni riscontri.

Con ciò il Curatore ha inteso assolvere un debito di riconoscenza contratto esattamente 40 anni fa nei confronti di Giulio Parise, sebbene all'insaputa di quest'ultimo.

Cosmopoli, 24 maggio 2007

CAPITOLO I

La Tetractis pitagorica ed il Delta massonico

*No, io lo giuro per colui che ha
trasmesso alla nostra anima la tetractys
nella quale si trovano la sorgente e la
radice dell'eterna natura.*

Detti aurei.

Riesumere e restituire l'antica aritmetica pitagorica è opera quanto mai ardua, perché le notizie che ne sono rimaste sono scarse e non tutte attendibili. Bisognerebbe ad ogni passo ed affermazione citare le fonti e discuterne il valore; ma questo renderebbe la esposizione lunga e pesante e meno facile la intelligenza della restituzione. Perciò, in generale, ci asterremo da ogni apparato filologico, ci atterremo soltanto a quanto risulta meno controverso e dichiareremo sempre quanto è soltanto nostra opinione o risultato del nostro lavoro.

La bibliografia pitagorica antica e moderna è assai estesa, e rinunciamo alla enumerazione delle centinaia di libri, studii, articoli, e passi di autori antichi e moderni che la costituiscono. Secondo alcuni critici, storici e filosofi, Pitagora sarebbe stato un semplice moralista e non si sarebbe mai occupato di matematica; secondo certi ipercritici Pitagora non sarebbe mai esistito; ma noi abbiamo per certa la esistenza di Pitagora, e, accettando la testimonianza del filosofo Empedocle quasi contemporaneo, riteniamo che le sue conoscenze in ogni campo dello scibile erano grandissime. Pitagora visse nel sesto secolo prima di Cristo, fondò in Calabria una scuola ed un Ordine che Aristotile chiamava scuola italica, ed insegnò tra le altre cose l'aritmetica e la geometria. Secondo Proclo, capo della scuola di Atene nel V secolo della nostra era, fu Pitagora che per il primo elevò la geometria alla dignità di scienza liberale, e secondo il Tannery la geometria esce dal cervello di Pitagora come Athena esce armata di tutto punto dal cervello di Giove.

Però nessuno scritto di Pitagora od a lui attribuito è pervenuto sino a noi, ed è possibile che non abbia scritto nulla. Se anche fosse diversamente, oltre alla remota antichità che ne avrebbe ostacolato la trasmissione, va tenuta presente la circostanza del segreto che i pitagorici mantenevano, sopra i loro insegnamenti, o parte almeno di essi. Un filologo belga, Armand Delatte, nella sua prima opera: *Études sur la littérature pythagoricienne*, Paris, 1915, ha fatto una dottissima critica delle fonti della letteratura pitagorica; ed ha messo in chiaro tra le altre cose che i famosi «*Detti Aurei*» o Versi aurei, sebbene siano una compilazione ad opera di un neo-pitagorico del II o IV secolo della nostra era, permettono di risalire quasi all'inizio della scuola pitagorica perché trasmettono materiale arcaico. Quest'opera del Delatte sarà la nostra fonte principale. Altre antiche testimonianze si hanno negli scritti di Filolao, di Platone, di Aristotile e di Timeo di Tauromenia. Filolao fu, insieme al tarentino Archita, uno dei più eminenti pitagorici nei tempi vicini a Pitagora, Timeo fu uno storico del pitagoreismo, ed il grande filosofo Platone risentì fortemente l'influenza del pitagoreismo e possiamo considerarlo come un pitagorico, anche se non appartenente alla setta. Assai meno antichi sono i biografii di Pitagora cioè Giamblico, Porfirio e Diogene Laerzio, che furono dei neo-pitagorici nei primi

secoli della nostra era, e gli scrittori matematici Teone da Smirne e Nicomaco di Gerasa. Gli scritti matematici di questi due ultimi autori costituiscono la fonte che ci ha trasmesso l'aritmetica pitagorica. Anche Boezio ha assolto questo compito. Molte notizie si debbono a Plutarco.

Tra i moderni, oltre al Delatte ed all'opera un po' vecchia dello Chaignet su *Pythagore et la philosophie pythagoricienne*, Paris, 2^a ed. 1874, ed al *Verbo di Pitagora* di Augusto Rostagni, Torino, 1924, faremo uso dell'opera *The Theoretic Arithmetic of the Pythagoreans*, London 1816; 2^a ed., Los Angeles, 1934, del dotto grecista inglese Thomas Taylor che fu un neo-platonico ed un neo-pitagorico; e tra gli storici della matematica faremo uso delle *Scienze esatte nell'antica Grecia*, Milano, Hoepli, 1914, 2^a ed., di Gino Loria, e dell'opera *A History of Greeck Mathematics* di T. Heath, 1921.

Per la matematica moderna l'unità è il primo numero della serie naturale dei numeri interi. Essi si ottengono partendo dall'unità ed aggiungendo successivamente un'altra unità. La stessa cosa non accade per l'aritmetica pitagorica. Infatti una stessa parola, monade, indicava l'unità dell'aritmetica e la monade intesa nel senso che oggi diremmo metafisico; ed il passaggio dalla monade universale alla dualità non è così semplice come il passaggio dall'uno al due mediante l'addizione di due unità.

In aritmetica, anche pitagorica, vi sono tre operazioni dirette: l'addizione, la moltiplicazione e l'innalzamento a potenza, accompagnate dalle tre operazioni inverse. Ora il prodotto dell'unità per sé stessa è ancora l'unità, ed una potenza dell'unità è ancora l'unità; quindi *soltanto l'addizione* permette il passaggio dall'unità alla dualità. Questo significa che per ottenere il due bisogna ammettere che vi possano essere due unità, ossia avere già il concetto del due, ossia che la monade possa perdere il suo carattere di unicità, che essa possa distinguersi e che vi possa essere una duplice unità od una molteplicità di unità. Filosoficamente si ha la questione del monismo e del dualismo, metafisicamente la questione dell'Essere e della sua rappresentazione, biologicamente la questione della cellula e della sua riproduzione. Ora se si ammette la intrinseca ed essenziale unicità dell'Unità, bisogna ammettere che *un'altra unità* non può essere che una apparenza; e che il suo apparire è una alterazione dell'unicità proveniente da una distinzione che la Monade opera in sé stessa. La coscienza opera in simil modo una distinzione tra l'io ed il non io. Secondo il *Vedanta advaita* questa è una illusione, anzi è la grande illusione, e non c'è da fare altro che liberarsene. Non è però una illusione che vi sia questa illusione, anche se essa può essere superata. I pitagorici dicevano che la diade era generata dall'unità che si allontanava o separava da sé stessa, che si scindeva in due: ed indicavano questa differenziazione o polarizzazione con varie parole: dieresi, tolma.

Per la matematica pitagorica l'unità non era un numero, ma era il principio, l'ἀρχή di tutti i numeri, diciamo principio e non inizio. Una volta ammessa resistenza di un'altra unità e di più unità, dall'unità derivano poi per addizione il due e tutti i numeri. I pitagorici concepivano i numeri come formati o costituiti o raffigurati da punti variamente disposti. Il punto era definito dai pitagorici l'unità avente posizione, mentre per Euclide il punto è ciò che non ha parti. L'unità era rappresentata dal punto (σημεῖον = segno) od anche, quando venne in uso il sistema alfabetico di numerazione scritta, dalla lettera A od α, che serviva per scrivere l'unità.

Una volta ammessa la possibilità dell'addizione dell'unità ed ottenuto il due, raffigurato dai due punti estremi di un segmento di retta, si può seguitare ad aggiungere delle unità, ed ottenere successivamente tutti i numeri rappresentati da due, tre, quattro... punti allineati. Si ha in tal modo lo sviluppo *lineare* dei numeri. Tranne il due che si può ottenere soltanto come addizione di due unità, tutti i numeri interi possono essere considerati sia come somma di altri numeri; per esempio il cinque è $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$; ma è anche $5 = 1 + 4$ e $5 = 2 + 3$. L'uno ed il due non godono di questa proprietà generale dei numeri: e perciò come l'unità anche il due non era un numero per gli antichi pitagorici ma il principio dei numeri pari. Questa concezione si perdette

col tempo perché Platone parla del due come pari ⁽³⁾, ed Aristotile ⁽⁴⁾ parla del due come del solo numero primo pari. Il tre a sua volta può essere considerato solo come somma dell'uno e del due: mentre tutti gli altri numeri, oltre ad essere somma di più unità, sono anche somma di parti ambedue diverse dall'unità; alcuni di essi possono essere considerati come somma di due parti eguali tra loro nello stesso modo che il due è somma di due unità e si chiamano i numeri pari per questa loro simiglianza col paio, così per esempio il $4 = 2 + 2$, il $6 = 3 + 3$ ecc. sono dei numeri pari; mentre gli altri, come il tre ed il cinque che non sono la somma di due parti o due addendi eguali, si chiamano numeri dispari. Dunque la triade 1, 2, 3 gode di proprietà di cui non godono i numeri maggiori del 3.

Nella serie naturale dei numeri, i numeri pari e dispari si succedono alternativamente; i numeri pari hanno a comune col due il carattere cui abbiamo accennato e si possono quindi sempre rappresentare sotto forma di un rettangolo (epipedo) in cui un lato contiene due punti, mentre i numeri dispari non presentano come l'unità questo carattere, e, quando si possono rappresentare sotto forma rettangolare, accade che la base e l'altezza contengono rispettivamente un numero di punti che è a sua volta un numero dispari. Nicomaco riporta anche una definizione più antica: esclusa la diade fondamentale, pari è un numero che si può dividere in due parti eguali o disuguali, parti che sono entrambe pari o dispari, ossia, come noi diremmo, che hanno la stessa parità; mentre il numero dispari si può dividere solo in due parti diseguali, di cui una pari e l'altra dispari, ossia in parti che hanno diversa parità.

Secondo l'Heath ⁽⁵⁾ questa distinzione tra pari e dispari rimonta senza dubbio a Pitagora, cosa che non stentiamo a credere; ed il Reidemeister ⁽⁶⁾ dice che la teoria del pari e del dispari è pitagorica, che in questa nozione si adombra la scienza logica matematica dei pitagorici e che essa è il fondamento della metafisica pitagorica. *Numero impari*, dice Virgilio, *Deus gaudet*.

La tradizione massonica si conforma a questo riconoscimento del carattere sacro o divino dei numeri dispari, come risulta dai numeri che esprimono le età iniziatiche, dal numero delle luci, dei gioielli, dei fratelli componenti una officina ecc. Dovunque si presenta una distinzione, una polarità, si ha una analogia con la coppia del pari e del dispari, e si può stabilire una corrispondenza tra i due poli ed il pari ed il dispari; così per i Pitagorici il maschile era dispari ed il femminile pari, il destro era dispari ed il sinistro era pari....

I numeri, a cominciare dal tre, ammettono oltre alla raffigurazione lineare anche una raffigurazione superficiale, per esempio nel piano. Il tre è il primo numero che ammette oltre alla raffigurazione lineare una raffigurazione piana, mediante i tre vertici di un triangolo (equilatero). Il tre è un triangolo, o numero triangolare; esso è il risultato del mutuo accoppiamento della monade e della diade; il due è l'analisi dell'unità, il tre è la sintesi dell'unità e della diade. Si ha così con la trinità la manifestazione od epifania della monade nel mondo superficiale. Aritmeticamente $1 + 2 = 3$.

Proclo ⁽⁷⁾ osservò che il due ha un carattere in certo modo intermedio tra l'unità ed il tre. Non soltanto perché ne è la media aritmetica, ma anche perché è il solo numero per il quale accade che sommandolo con sé stesso o moltiplicandolo per sé stesso, si ottiene il medesimo risultato, mentre per l'unità il prodotto dà di meno della somma e per il tre il prodotto dà di più, ossia, si ha:

$$1 + 1 = 2 > 1 \cdot 1 \quad ; \quad 2 + 2 = 4 = 2 \cdot 2 \quad ; \quad 3 + 3 = 6 < 3 \cdot 3$$

⁽³⁾ PLATO, *Parmenide*, 143 d.

⁽⁴⁾ ARISTOTILE, *Topiche*, 2, 137.

⁽⁵⁾ HEATH, *A History of Greek Mathematics*, I, 70.

⁽⁶⁾ E. REIDEMEISTER, *Die arithmetik der Griechen*, 1939, pag. 21.

⁽⁷⁾ PROCLO, *Comm.* alla 20^a proposizione di Euclide, e cfr. TAYLOR, *The Theoretic Arithmetic of Pythagoreans*, 2^a ed., Los Angeles 1924, pag. 176.

Modernamente invece è stato osservato che 1, 2, 3 sono i soli numeri interi positivi la cui somma sia eguale al prodotto. Si può anche riconoscere facilmente che 1, 2, 3 è la sola terna di interi consecutivi per la quale accade che la somma dei primi due è eguale al terzo; infatti l'equazione $x + (x + 1) = x + 2$ ammette per unica soluzione $x = 1$. Così pure si riconosce subito mediante la raffigurazione geometrica che la somma di più interi consecutivi supera sempre il numero che segue l'ultimo degli addendi, tranne nel caso in cui gli addendi sono due in cui si ha: $1 + 2 = 3$. Concludendo la triade, la santa trinità, si può ottenere solo mediante l'addizione della monade e della diade.

Ottenuto così il tre che, considerando la monade come potenzialmente triangolare, è il secondo numero triangolare, si possono ottenere altri numeri triangolari disponendo al di sotto della base il numero tre e si ottiene il numero triangolare 6; e così seguitando disponendo sotto la base quattro punti si ottiene il dieci ecc.



Fig. 1

Questo sviluppo geometrico del primo triangolo rispetto ad uno dei tre vertici preso come centro di omotetia, ci dà così successivamente i numeri triangolari; e si chiama gnomone triangolare la base che si aggiunge per passare da un triangolare al triangolare consecutivo. Aritmeticamente, scritta in una prima riga la successione dei numeri interi, se ne deduce la successione dei triangolari, scrivendo l'unità sotto l'unità, poi facendo la somma di uno e di due, eppoi prendendo per elementi della seconda riga i numeri che si ottengono facendo successivamente la somma dei primi numeri interi, oppure facendo, per ottenere un elemento della seconda riga, la somma dell'elemento che lo precede nella stessa riga con quello che lo precede nella stessa colonna:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	...

Così, per definizione, l' n° triangolare è la somma dei primi n numeri interi, ed è quindi eguale all' $(n - 1)^{\circ}$ triangolare aumentato di n .

Se il triangolare tre ha la forma di un triangolo equilatero, procedendo con lo sviluppo omotetico, anche gli altri numeri triangolari hanno forma regolare, e precisamente si conserva nello sviluppo la similitudine della forma. Inoltre, siccome attorno ad un punto si possono disporre sei angoli di 60° (come era noto ai pitagorici), ossia vi sono sei triangoli equilateri congruenti attorno ad un punto, sviluppandoli tutti e sei rispetto a questo loro vertice comune preso come centro di omotetia, si ottiene il riempimento totale ed isotropico del piano mediante triangoli regolari.

Anche il numero quattro, oltre alla raffigurazione lineare, ammette una sola raffigurazione piana:



Fig. 2

Esso è perciò un quadrato; è il secondo quadrato, perché l'unità è il quadrato di uno. Lo gnomone del quadrato, ossia la differenza tra il 4 che è il secondo quadrato ed il quadrato precedente è 3, il terzo quadrato, ossia come noi diciamo il quadrato di base 3, si ottiene nella raffigurazione geometrica aggiungendo al di sotto ed a destra uno gnomone a forma di squadra

composto di 5 punti; e così via si passa da un quadrato al successivo aggiungendo successivamente i numeri dispari. Si vede così che anche i quadrati crescono conservando la similitudine della forma; e, poiché attorno ad un punto si possono disporre quattro angoli retti congruenti ed in ognuno di essi un quadrato, ne segue che, sviluppando omoteticamente rispetto al vertice comune come centro di omotetia i quattro quadrati, si ottiene il riempimento totale ed isotropico del piano mediante quadrati.

Aritmeticamente basta scrivere in una prima riga i numeri dispari, e nella seconda operare come si è fatto per i numeri triangolari per ottenere i quadrati:

1	3	5	7	9	11	13	15	17 ...
1	4	9	16	25	36	49	64	81 ...

Ne segue l'importante proprietà: La somma dei primi n numeri dispari è eguale all' n° quadrato, proprietà che permise a Galileo di trovare la formola del moto naturalmente accelerato.

Un quadrato è un numero a forma di rettangolo i cui lati contengono egual numero di punti. Un numero avente forma rettangolare era chiamato *eteròmeo* se da un lato conteneva un solo punto di più del consecutivo, ed era chiamato *promeco* se la differenza tra i punti di un lato e quello consecutivo superava uno. Per esempio il 15 è un promeco ed il 20 un eteromeo.



Fig. 3

Conducendo di fianco e parallelamente ad una diagonale una linea retta essa divide un numero eteromeo in due parti che sono due triangoli eguali; e siccome il numero dei punti dell' n° eteromeo, costituito da n colonne e da n righe è $n(n+1)$ ne segue per l' n° numero triangolare la formola

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

ricordando la definizione di triangolare si ha:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Se invece si conduce in un numero quadrato la parallela ad una diagonale, il quadrato si suddivide in due triangolari consecutivi; ossia la somma di due triangolari consecutivi è eguale ad un quadrato; e questo permette di dedurre dalla successione dei triangolari quella dei quadrati. Scritta nella prima riga la successione dei triangolari si ottiene nella seconda riga la successione dei quadrati

1	3	6	10	15	21	28	36 ...
1	4	9	16	25	36	49	64 ...

scrivendo sotto ogni elemento della prima riga la sua somma col precedente.

A differenza del numero tre, il numero quattro ammette anche una raffigurazione geometrica spaziale. Precisamente, conducendo la perpendicolare al piano di un triangolo equilatero per il suo centro, vi è su di essa un punto che ha dai tre vertici del triangolo distanza eguale al lato; i quattro punti sono i vertici di un tetraedro, chiamato piramide dai greci ⁽⁸⁾, ossia di una

⁽⁸⁾ La parola greca *pyramis* è una lieve corruzione dell'egiziano *pirem-us* che designa l'altezza della piramide (cfr. REVILLOUT E., *Revue Egypt.*, 2^e année, 305-309. L'errata etimologia da $\pi\tilde{\upsilon}\rho$ = fuoco spiega perché il tetraedro sia in Platone il simbolo del fuoco.

piramide regolare a base triangolare, che è la rappresentazione nello spazio del numero quattro. Anche in questo caso è possibile lo sviluppo omotetico rispetto ad uno dei vertici, ossia si può disporre al di sotto della base il numero triangolare consecutivo e si ottengono così i numeri tetraedrici. Lo gnomone del tetraedro è costituito dal triangolare che si aggiunge al tetraedro precedente. Il primo numero tetraedrico è l'unità: il secondo è 4 perché $1 + 3 = 4$; il terzo è 10 perché $4 + 6 = 10$. Partendo da una prima riga tutta composta di unità, e scrivendo nella seconda riga la successione dei numeri naturali, nella terza quella dei triangolari e nella quarta quella dei tetraedrici, si ottiene il seguente quadro:

	unità	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
	numeri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
lineari	triangolari	1	3	6	10	15	21	28	36	45	...
	tetraedrici	1	4	10	20	35	56	84	120	165	...

La legge di formazione di questo quadro è la seguente: Ogni elemento del quadro è eguale alla somma di tutti gli elementi della riga precedente a cominciare dal primo sino a quello sovrastante all'elemento considerato; ad esempio il $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, il $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$, il $35 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15$; od anche ogni elemento è eguale alla somma di quello che lo precede nella stessa riga e di quello che lo sovrasta nella stessa colonna, per esempio $35 = 20 + 15$.

Esiste un solo sviluppo lineare dei numeri. Esistono invece infiniti sviluppi superficiali dei numeri ed infiniti sviluppi solidi. Per esempio il numero 5 si può rappresentare nel piano mediante i 5 vertici di un pentagono e nello spazio mediante i cinque vertici di una piramide a base quadrata. Lo sviluppo per i pentagonali si fa prendendo come centro di omotetia uno dei vertici del pentagono, e per il tetraedro a base quadrata prendendo come centro di omotetia il vertice della piramide. Aritmeticamente per ottenere i pentagonali basta partire dalla successione dei termini della serie aritmetica di ragione tre ossia dai numeri: 1, 4, 7, 10, 13, 16 ... e farne la somma. La somma dei primi n è eguale all' n° pentagonale, e quindi i pentagonali sono: 1, 5, 12, 22, 35, 51 ... I piramidali a base quadrata si ottengono invece facendo la somma dei primi n quadrati consecutivi: 1, 4, 9, 16, 25 ... e sono i numeri: 1, 5, 14, 30, 55 ... In simile modo si ottengono i numeri esagonali partendo dalla serie aritmetica di ragione 4, o serie degli gnomoni esagonali che sono: 1, 5, 9, 13, 17 ... ; e gli esagonali sono: 1, 6, 15, 28, 45... Si riconosce facilmente che l' n° numero esagonale non è altro che il $(2n - 1)^{\circ}$ numero triangolare. Si potrebbe anche mostrare che nello sviluppo omotetico dei pentagonali e degli esagonali si conserva la similitudine della forma, ma non l'isotropia; e perciò, sebbene il piano acconsenta una ripartizione in esagoni regolari, non se ne può ottenere il riempimento totale ed isotropico mediante lo sviluppo omotetico di tre esagonali congruenti attorno ad un vertice comune. Così pure si può mostrare che lo spazio acconsente una equipartizione solo mediante i cubi i cui vertici lo riempiono totalmente ed isotropicamente; ma non acconsente una equipartizione in altro modo sebbene il tetraedro ed anche l'ottaedro siano sviluppabili omoteticamente e riempiano totalmente ed isotropicamente l'angoloide entro il quale si sviluppano. Facciamo questa osservazione perché Aristotile, dopo avere detto ⁽⁹⁾ correttamente che il piano può essere equipartito solo mediante triangoli regolari, quadrati ed esagoni regolari, aggiunge che lo spazio può essere equipartito mediante cubi e mediante piramidi. Si tratta di un errore in cui è incorso Aristotile; e, siccome i tre numeri poliedrici regolari tetraedrico, cubico ed ottaedrico, sviluppati omoteticamente entro uno dei loro angoloidei, riempiono questo angoloide totalmente ed isotropicamente, l'errore di Aristotile consiste nell'aver confuso lo spazio con

⁽⁹⁾ ARISTOT., *De coelo*, III, 8.

lo spazio dell'angoloide; ma se l'errore proviene da una tale confusione si ha una prova indiretta che i pitagorici del tempo si occupavano già dei numeri cubici, tetraedrici ed ottaedrici nonché della questione della equipartizione del piano mediante poligoni regolari e dello spazio mediante poliedri regolari ed in particolare dello spazio contenuto in un angoloide. Oltre a questi numeri piani detti numeri poligonali, ed ai numeri piramidali raffigurati nello spazio da delle piramidi a base poligonale, i pitagorici considerarono numeri piani e solidi a forma rettangolare, e di parallelepipedo ed a forma di poliedro regolare. La formola che dà l' n° numero poligonale che ha r lati era nota a Diofanto ed è

$$P(r, n) = \frac{n}{2} \{(r-2)n - (r-4)\}$$

per esempio per $n = 4$ ed $r = 6$ questa formola dà per il quarto numero esagonale $P(6 . 4) = 28$; i punti che lo raffigurano hanno la seguente disposizione:

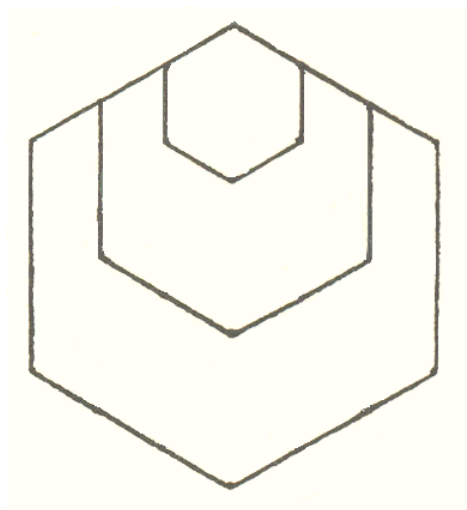


Fig. 4

La formola che dà l' n° numero piramidale a base r -gonale è

$$F(r, n) = \frac{n(n+1)}{6} \{(r-2)n - (r-5)\}$$

che sotto altra forma compare nel *Codex Arcerianus*, un codice romano del 450 dell'era volgare ⁽¹⁰⁾. Per esempio per $r = 4$ ed $n = 5$ si trova che il quinto piramidale a base quadrata è $F(4 . 5) = 55$.

Come per delimitare un segmento di retta occorrono due punti, il minimo numero di rette con cui si delimita una porzione di piano è il tre; tra tutti i numeri piani il tre è il minimo; analogamente il minimo numero di piani occorrente per delimitare una porzione dello spazio è quattro; tra tutti i numeri solidi il 4 ossia il tetraedro è il minimo. Secondo Platone (cfr. il *Timeo*) questo tetraedro o piramide, come egli lo chiama, è l'ultima particella costituente i corpi, ossia l'atomo o molecola della materia. Naturalmente oggi sappiamo che gli atomi o le molecole non hanno questa forma e che non sono affatto indivisibili, ma vale la pena di notare che il corpo che possiede la maggiore saldezza molecolare, ossia il diamante, ha la molecola composta di quattro atomi disposti a forma di tetraedro regolare ⁽¹¹⁾.

Aggiungendo l'unità all'unità si è passati dal punto alla linea, individuata da due punti; aggiungendo a questi due punti un altro punto si può passare al piano mediante il triangolo; ed

⁽¹⁰⁾ Cfr. CANTOR M., *Die Römischen Agrimensoren*, Leipzig, 1875, pagg. 93, 127.

⁽¹¹⁾ Cfr. WILLIAM BRAGG, *L'architettura delle cose*, 2^a ed. ital., Milano, 1935, pag. 157.

aggiungendo ancora l'unità si può passare allo spazio mediante il tetraedro. Ma restando nei limiti dell'intuizione umana dello spazio tridimensionale non è possibile aggiungere una unità ai quattro vertici del tetraedro prendendo un punto fuori dello spazio tridimensionale e raffigurare il 5 come una piramide dell'iperspazio avente per base il tetraedro. In altre parole dall'unità si passa al due e si ha la linea, dal due si passa al tre e si ha il piano, dal tre si passa al quattro e si ha lo spazio: eppoi bisogna smettere, si è giunti alla fine del procedimento. Ora, secondo l'accezione aristotelica ed anche semplicemente greca della parola perfezione, le cose sono perfette quando sono terminate, completate: il limite, la fine è una perfezione. Nel nostro caso, siccome il quattro è l'ultimo numero che si ottiene passando dal punto alla linea, dalla linea al piano e dal piano allo spazio, perché non si può raffigurare un quinto punto fuori dello spazio definito dai quattro vertici del tetraedro, il quattro è, nel senso generico greco e pitagorico della perfezione, un numero perfetto. L'assieme della monade, della diade, della triade e della tetrade comprende il tutto: il punto, la linea, la superficie ed il mondo concreto materiale solido; e non si può andare oltre. Quindi anche la somma

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

ossia l'assieme o la quaterna o quaderna dell'unità, della dualità, della trinità o della tetrade, ossia la decade, è perfetta e contiene il tutto.

Ogni assieme o somma di quattro cose è detta con parola pitagorica *tetractis*; e vi sono varie *tetractis*; ma questa che abbiamo ora considerato è la *tetractis* per eccellenza, la *tetractis* pitagorica per la quale i pitagorici prestavano giuramento. Un frammento di Speusippo osserva che il dieci contiene in sé la varietà lineare, piana e solida di numero, perché 1 è un punto, 2 una linea, 3 un triangolo e 4 una piramide ⁽¹²⁾.

Filone ebreo ⁽¹³⁾, ripetendo concetti pitagorici, dice che quattro sono i limiti delle cose: punto, linea, superficie e solido, e Gemino dice che l'aritmetica è divisa nella teoria dei numeri lineari, nella teoria dei numeri piani e nella teoria dei numeri solidi.

La perfezione, ossia il completamento della manifestazione universale, è raggiunta col dieci che è la somma dei numeri sino a quattro. La decade contiene il tutto, come l'unità, che contiene il tutto potenzialmente. Il nome *δεκάς* è appunto questo per tale proprietà ricettiva *δεχάς*.

Questa constatazione è il risultato del limite posto allo sviluppo dei numeri dalla tridimensionalità dello spazio, e si verrebbe al riconoscimento di questa stessa proprietà del 4 e del 10 anche se la numerazione parlata invece di essere la numerazione decimale fosse per esempio una numerazione a base dodecimale o a base ternaria. Per altro constatiamo la coincidenza. La ragione per cui la numerazione parlata greca, latina, italiana ecc. è decimale, sta nel fatto che l'uomo possiede dieci dita delle mani, le quali sono di grande aiuto nel contare (contare a mena dito) tanto che nella scrittura latina e greca antica l'unità era rappresentata da un dito identificato in seguito con la lettera I. L'ultimo dito è il decimo, e quindi il 10 è perfetto. Il cinque ha nelle due scritture speciale rappresentazione, in greco mediante l'iniziale della parola *pente*, in latino mediante la palma, o spanna della mano aperta in seguito identificata con la lettera V, poiché presso i latini la scrittura dei numeri precorre la conoscenza e l'uso dell'alfabeto; ed il 10 è rappresentato in greco dalla lettera Δ iniziale di decade e che ha la forma di un triangolo equilatero mentre in latino è rappresentato dalle due mani aperte ed opposte ossia dal segno in seguito identificato con la lettera X. Questi segni bastano nella scrittura greca e latina dei numeri alla rappresentazione o scrittura dei numeri sino al cento, cui provvede in greco l'iniziale H della parola *Hecaton*, ed in latino un segno in seguito identificato colla iniziale di *centum*.

⁽¹²⁾ Cfr. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, 75.

⁽¹³⁾ FILONE, *De Mundi opificio*, 10, 16, 34.

Tanto la tetractis pitagorica che la numerazione parlata pongono in evidenza l'importanza del numero dieci per vie assolutamente indipendenti. E questa non è la sola concordanza tra il 4 ed il 10 perché la lingua greca forma i nomi dei numeri dal dieci al 99 mediante i nomi dei primi dieci numeri, introduce un nome nuovo per indicare il 100, eppoi un nome nuovo per indicare il mille, ed in fine un nuovo ed ultimo nome per indicare la decina di migliaia o miriade. Questa stessa parola *μύριοι*, diversamente accentata *μυρίοι*, indica un numero grandissimo indeterminato. Insomma la lingua greca dispone soltanto di quattro nomi, dopo il nove, per designare le prime quattro potenze del dieci e si arresta alla quarta potenza, come la somma dei numeri interi ha termine col quattro nella tetractis.

Una terza constatazione relativa alla decade (e quindi alla tetractis) è la seguente: Dopo l'unità che è potenzialmente poligonale, piramidale e poliedrico di qualunque genere, il primo numero che è simultaneamente lineare, triangolare e tetraedrico, e compare quindi nella irradiazione dell'unità e nella più semplice forma di manifestazione e di concretizzazione dell'unità, è il numero dieci. Esso è il primo numero che compare simultaneamente nelle tre successioni dei numeri lineari, triangolari e tetraedrici:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...
1	3	6	10	15	21 ...					
1	4	10	20 ...							

Non si conoscono che cinque numeri che godono di questa proprietà; essi sono: 1, 10, 120, 1540, 7140. La determinazione degli altri numeri che sono simultaneamente triangolari e tetraedrici dipende dalla risoluzione dell'equazione che si ottiene eguagliando l' x° triangolare all' y° tetraedrico, ossia dalla risoluzione dell'equazione indeterminata di terzo grado con due incognite.

$$\frac{x(x+1)}{2} = \frac{y(y+1)(y+2)}{6}$$

equazione di cui si conoscono le cinque soluzioni:

x	1	4	15	55	119
y	1	3	8	20	34

ma di cui la matematica moderna non sa determinare le altre eventuali soluzioni intere.

Una quarta constatazione è fornita dalla osservazione che la lettera delta è la quarta lettera dell'alfabeto greco ed ha la forma di un triangolo equilatero. La lettera D = delta è la quarta lettera anche nell'alfabeto etrusco, latino e fenicio e nei vari alfabeti greci (in uso nei vari periodi); e, sebbene l'ordine delle lettere di un alfabeto non sia un ordine stabilito da una legge di natura, occorre non trascurare questa osservazione per il valore che potevano annetterle i pitagorici o parte di essi. La decade è dunque il quarto numero triangolare ed il terzo tetraedrico ed è rappresentata nella scrittura dei numeri dalla sua iniziale che è la quarta lettera dell'alfabeto ed ha la forma di un triangolo.

Se si prende il quarto triangolare la sua raffigurazione è

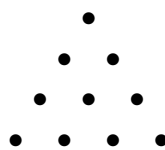


Fig. 5

raffigurazione che trovasi in Theone da Smirne ed in Nicomaco da Gerasa. Questa raffigurazione della decade è un *simbolo*, nel senso etimologico della parola, ossia di riunione di più sensi. Vi è un simbolo che è un *triangolo* o triangolare; esso è il quarto triangolare, è

composto di dieci punti disposti secondo quattro righe contenenti rispettivamente uno, due, tre e quattro punti. «Guarda, dice Luciano, quelli che tu credi quattro sono dieci, ed il triangolo perfetto, ed il nostro giuramento»⁽¹⁴⁾.

Una quinta constatazione assai importante, in ispecie e sicuramente per i Pitagorici, si ottiene dalla considerazione della scala musicale. La musica moderna fa uso della scala temperata, la quale è approssimativamente la scala naturale basata sopra il principio dei rapporti semplici; i greci invece facevano uso della scala pitagorica basata sopra il principio di quinta. Vedremo in seguito la genesi di questa scala; per il momento limitiamoci a constatare che queste scale sono tutte e tre costituite da sette note fondamentali disposte nell'ordine ben noto. I greci chiamavano armonia l'ottava.

Le note fondamentali di questa gamma od ottava, delle quali con la legge di quinta si deducono le altre, sono la prima, la quarta, la quinta e l'ottava; cioè le quattro corde del tetracordo di Filolao: la prima, la quarta, o *sillaba*, la quinta o diapente ed il diapason. Secondo la tradizione, Pitagora mediante l'osservazione e l'esperimento aveva scoperto che i rapporti tra la lunghezza di queste corde e la lunghezza della prima erano espressi dai rapporti numerici 4:3, 3:2, 2:1 cioè dai rapporti tra i numeri della tetractis, che sono non soltanto dei rapporti semplici ma anche i più semplici rapporti possibili. Il tetracordo di Filolao mostra che nel campo dell'armonia compaiono alle fondamenta gli stessi numeri 1, 2, 3, 4 che compaiono nella tetractis. «Questa scoperta, scrive il Delatte⁽¹⁵⁾, produsse su tutti gli spiriti, particolarmente sui Pitagorici, un effetto straordinario, che oggi non possiamo più apprezzare. La tetractis donava loro la chiave dei misteri dell'acustica ed essi estesero a tutto il dominio della fisica le conclusioni di questa scoperta. Essa divenne uno dei fondamenti della loro filosofia aritmologica e si comprende che essi abbiano potuto considerare la tetractis come la sorgente e la radice dell'eterna natura».

La formula poetica del giuramento pitagorico ci è stata trasmessa da vari autori; e la sua forma più ordinaria ed esatta è la seguente⁽¹⁶⁾:

οὐ, μὰ τὸν ἀμετέρα ψυχᾶ παραδόντα τετρακτύν
παγάν ἀενάου φύσεως ῥίζωμά τ' ἔχουσαν

ossia: No, io lo giuro per colui che ha trasmesso alla nostra anima la tetractis nella quale si trovano la sorgente e la radice dell'eterna natura. Una variante di questa formula compare anche nei «Detti aurei».

Il simbolo pitagorico della tetractis, nella sua forma schematica di triangolo equilatero, coincide manifestamente colla forma schematica del delta massonico, ed anche con la forma schematica del delta cristiano simbolo della Trinità. Questa ultima assimilazione vien fatta facilmente, anzi con facilità, specialmente schiaffandoci dentro tanto di occhio del Padre eterno. Il carattere cristiano del simbolo massonico non è più tanto appariscente quando; come spesso accade, nel triangolo compare scritto il tetragrammaton, ossia, il nome di Dio in quattro lettere, così designato dai cabalisti con parola greca; e sparisce addirittura quando il triangolo è collocato entro la stella fiammeggiante a cinque punte o pentalfa pitagorico, come nel frontespizio dell'*Etoile Flamboyante* del Barone De Tschoudy, cui è attribuito il rituale del 14° grado del Rito Scozzese.

Inoltre il delta sacro, che è insieme al sole ed alla luna; uno dei tre lumi sublimi della società dei liberi muratori, come dice il rituale dell'Apprendista, si trova nei lavori di primo grado tra i simboli del sole e della luna dietro il seggio del Venerabile; mentre nei lavori di secondo grado è sostituito dalla Stella fiammeggiante. Le rispettive età iniziatiche dell'apprendista e del

⁽¹⁴⁾ LUCIANO, *Vita. auct.*, 4.

⁽¹⁵⁾ A. DELATTE, *Etudes sur la littérature pithagoricienne*, pag. 259.

⁽¹⁶⁾ Ibidem, pag. 250.

compagno corrispondono a questa sostituzione. Ne deriva una connessione tra i due simboli; e, siccome senza ombra di dubbio, la stella a cinque punte è simbolo caratteristico tanto dall'antico sodalizio pitagorico che della massoneria, ne risulta confermata la identificazione del delta massonico con la tetractis pitagorica. Per attribuire un carattere cristiano anche allo stellone a cinque punte non resterebbe che affermare che tale era la forma della stella apparsa, secondo il quarto Vangelo, ai tre re Magi, Melchiorre, Gasparre e Baldassarre; ma il quarto Vangelo su questo punto non si pronunzia; e gli altri Vangeli, i tre sinottici, non fanno la menoma menzione dei tre re magi. E siccome gli antichi documenti attestano la continuità della tradizione massonica che si richiama a Pitagora, la identificazione della massoneria con la geometria e la pretesa dei massoni di essere i soli a conoscere i numeri sacri, ci pare che la identificazione del Delta massonico con la tetractis pitagorica sia confortata da argomenti di maggior peso che non la identificazione col simbolo cristiano.

Tra i simboli muratorii non compare alcun simbolo cristiano, neppure la croce; compaiono invece, ed è naturale, solo simboli di mestiere e simboli geometrici, architettonici e numerici. Se il delta massonico avesse il carattere cristiano esso sarebbe un simbolo isolato, spaesato, di cui non si comprenderebbe la esistenza e la eterogeneità in massoneria.. Insistiamo su questo punto non solamente perché è doveroso per la serietà e la serenità delle indagini critiche non lasciarsi fuorviare da simpatie od antipatie, ma perché l'incomprensione e l'ignoranza in proposito sono antiche ed esiziali, e molti rituali, invece di guidare i fratelli verso la piena intelligenza del simbolismo, contribuiscono in buona o mala fede ad impedire quella interpretazione che è indispensabile per comprendere il senso puramente muratorio del simbolismo.

Con questo non intendiamo affermare né scorgere un contrasto tra la tetractis pitagorica o delta massonico ed il simbolo cristiano della Trinità. Tale opposizione del ternario cristiano al quaternario pitagorico fu opera del fanatismo miope dei cristiani dei primi secoli; ed era ingiustificata perché, come vedremo, i pitagorici furono degli esaltatori della triade, e questa loro consuetudine di noverare e venerare in tutte le cose il numero tre li guidò persino nella classificazione dei numeri.

Riassumendo, il due si può ottenere soltanto mediante l'addizione, e soltanto mediante l'addizione di due unità. Il tre si può ottenere soltanto mediante l'addizione, in cui almeno uno dei termini è l'unità.

Dal quattro in poi tutti i numeri si possono ottenere mediante addizione di termini tutti distinti, dall'unità. La raffigurazione geometrica dei numeri nello spazio tridimensionali ha termine ed è perfetta col numero quattro, e siccome la somma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ è anche la nuova unità del sistema di numerazione decimale, ne segue la perfezione del quattro e della decade ed il simbolo della tetractis. Perciò i pitagorici non si occuparono in modo speciale dei numeri maggiori del dieci che si esprimevano nel linguaggio e nella scrittura mediante il dieci ed i numeri precedenti, e per questa ragione, forse, ridussero ai primi nove numeri i numeri maggiori del dieci mediante la considerazione del loro *pitmene* o fondo, ossia sostituendo ad essi il resto della loro divisione per nove od il nove stesso quando il numero era un multiplo del nove: resto che essi ottenevano facilmente mediante la ben nota regola del resto della divisione per nove.

Poiché lo sviluppo dei numeri per addizione ha termine col quattro, occorre considerare ora lo sviluppo o generazione dei numeri mediante la moltiplicazione. Che i pitagorici siano effettivamente ricorsi a questo criterio di distinzione è certo, perché il numero sette era consacrato ed assimilato a Minerva perché come Minerva era vergine e non generato, ossia non era fattore di alcun numero (entro la decade) e non era prodotto di fattori. I numeri si distinguono quindi in numeri che non sono prodotti di altri numeri ossia in numeri primi od asintetici, ed in numeri che sono prodotti o numeri composti o sintetici. Tenendo conto dei soli numeri entro la decade, i numeri si suddividono in quattro classi: la classe dei numeri primi

entro la decade che sono fattori di numeri della decade: e sono il due (che veramente non è un numero) ma compare come fattore del 4, del 6, dell'8 e del 10, il tre che è fattore del 6 e del 9; ed il 5 che è fattore del 10. La seconda classe è costituita dai numeri primi minori del 10 che non sono fattori di numeri minori del 10, ed è costituita dal solo numero sette. La terza classe è costituita dai numeri composti, inferiori al dieci, e che sono fattori di numeri minori del dieci, ed è costituita dal solo numero quattro, che è in pari tempo quadrato del due e fattore dell'8; la quarta classe è costituita dai numeri composti minori del dieci che sono prodotti di altri numeri senza essere fattori di numeri entro la decade, essa è costituita dal sei, dall'otto e dal nove, poiché $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 8$ e $3 \cdot 3 = 9$. Non tenendo conto del 10 e tenendo conto del due si hanno quattro numeri primi: 2, 3, 5, 7 di cui uno solo non produce altri numeri, e quattro numeri composti: 4, 6, 8, 9 di cui uno solo è anche fattore.

Vale la pena di osservare come questo criterio pitagorico di distinzione per la classificazione dei numeri entro la decade coincide perfettamente col criterio tradizionale di distinzione cui si attiene il Vedanta per la quadruplici classificazione dei venticinque principii o *tattwa*, precisamente il primo principio (*Prakriti*) che non è produzione ma è produttivo, sette principii (*Mahat, Ahamkara* ed i 5 *tanmatra*) che sono contemporaneamente produzioni e produttivi, 16 principii (gli 11 *indriya*, compreso *Manas* ed i 5 *bhuta*) che sono produzioni improduttive, ed in fine *Purusha* che non è né produzione né produttivo. Rimandiamo il lettore in proposito alla esposizione che ne fa René Guénon ne *L'uomo ed il suo divenire secondo il Vedanta*, Bari, Laterza, 1937. Questo stesso criterio di distinzione ispira, come ha osservato il Colebrooke (*Essais sur la Philosophie des Hindous*, trad. Pauthier), la divisione della Natura, fatta nel trattato *De divisione Naturae* di Scoto Erigena, il quale dice: «La divisione della Natura mi sembra dover essere stabilita in quattro differenti specie, di cui la prima è ciò che crea e non è creato; la seconda è ciò che è creato e crea a sua volta: la terza ciò che è creato e non crea, e la quarta infine ciò che non è creato e nemmeno crea». Naturalmente non è il caso di parlare di derivazione; comunque Pitagora, cronologicamente, precede, non solo Scoto Erigena, ma anche Sankaracharya. Resta così stabilito il carattere tradizionale della dottrina pitagorica dei numeri.

CAPITOLO II

La quaterna dei numeri composti o sintetici

*Non ex omni ligno, ut Pythagoras
dicebat, debet Mercurius exculpi.*

APULEIO - De Magia.

Nello sviluppo dei numeri partendo dall'unità e passando per il segmento di retta, per il triangolo e per il tetraedro, ci siamo dovuti fermare al numero quattro perché l'aggiunta di un nuovo punto fuori dello spazio tridimensionale non è possibile per l'intuizione umana. Possiamo seguitare ad aggiungere delle unità consecutivamente, ma possiamo farlo solo restando nel campo dei numeri lineari, piani e solidi; e, considerando ad esempio i numeri lineari, manca ogni criterio per distinguere le proprietà relative dei vari numeri.

Per altro, invece di generare i numeri mediante l'addizione, si può allora considerare ed ottenere la generazione dei numeri mediante l'operazione della moltiplicazione. Anzi la stessa terminologia, rimasta tradizionalmente immutata, indica chiaramente che i numeri venivano considerati come *prodotti* da questa operazione. Seguendo questa via si presenta immediatamente la distinzione dei numeri in due e quattro classi: la classe dei numeri primi o *protoi* od asintetici che non si possono ottenere mediante la moltiplicazione, e la classe dei numeri sintetici, o secondari e composti che sono il prodotto di altri numeri detti i loro fattori. Siccome il due non è un numero ed i numeri pari sono sempre prodotto del due per un altro fattore, i numeri primi sono sempre dei numeri dispari; ed i numeri dispari che non siano dei promechi o dei quadrati sono dei numeri primi. Nella prima decade, non contando il due, sono contenuti soltanto tre numeri primi: il tre, il cinque ed il sette; ossia i numeri sacri all'apprendista, al compagno ed al maestro libero muratore.

I numeri della decade che si possono ottenere mediante la moltiplicazione sono quattro: il quattro, il sei, l'otto ed il nove.

Il quattro è il prodotto di due fattori eguali a due, ossia è un quadrato; e, siccome i quadrati si ottengono mediante l'aggiunta consecutiva di gnomoni che non sono altro che i numeri dispari consecutivi, e siccome nel crescere i quadrati conservano la similitudine della forma, così agli occhi dei pitagorici essi conservano in certo modo il carattere dei numeri dispari anche se la loro base non è dispari, perché si differenziano dagli altri numeri rettangolari che nello sviluppo geometrico non conservano la similitudine della forma. Per esempio i numeri eteromechi si ottengono dal due aggiungendo successivamente uno gnomone a forma di squadra di cui uno dei lati contiene un punto in più





Fig. 6

e si hanno i numeri: $2, 2 \cdot 3 = 6, 3 \cdot 4 = 12, 4 \cdot 5 = 20 \dots \dots n(n + 1)$. Questi numeri hanno sempre forma differente, perché due numeri eteromechi come $n(n + 1)$ ed $m(m + 1)$ non possono avere i lati dell'uno proporzionali a quelli dell'altro, cioè non può accadere che sia $n : m = (n + 1) : (m + 1)$ perché dovrebbe essere $m(n + 1) = n(m + 1)$ e quindi $n = m$. E la stessa cosa accade per i numeri rettangolari detti promechi od oblungi che sono prodotti di due fattori che differiscono di un numero r qualunque diverso da uno come l'8, il 15, il 24. . . $m(m + 2)$; perché non può mai accadere che il numero $m(m + r)$ sia simile al numero $n(n + r)$ ossia che $m : n = (m + r) : (n + r)$ dovendo essere in tal caso $m r = n r$ e quindi $m = n$. Ed un numero può essere promeco ed eteromeco in varie forme tutte tra loro dissimili; per esempio $45 = 5 \cdot 9 = 3 \cdot 15$; e $16 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 8$. Perciò i numeri quadrati sono i soli rettangolari che crescono conservando la similitudine della forma. Il quattro, dopo l'unità, è il primo di tali numeri. In tal modo esso si sottrae alla imperfezione dei numeri pari: sappiamo anzi che esso è perfetto perché con esso ha termine lo sviluppo dell'unità nello spazio e si ottiene la decade.

Quanto al numero sei esso è un numero eteromeco; ma esso è anche un numero perfetto; e precisamente è il primo numero perfetto nel senso anche odierno del termine. Si dicono infatti numeri perfetti quei numeri che sono eguali alla somma dei loro divisori (eccettuato il numero stesso). Infatti i divisori del sei sono: 1, 2, 3 e si ha: $1 + 2 + 3 = 6$. Da questo punto di vista i pitagorici distinguevano tre specie di numeri: i numeri perfetti, i numeri ellittici ed i numeri iperbolici. I numeri perfetti erano quelli per i quali la somma dei divisori era esattamente eguale al numero stesso; i numeri ellittici o deficienti quelli per i quali la somma dei divisori era minore del numero stesso; ed i numeri iperbolici od abbondanti quelli per i quali la somma dei divisori superava il numero stesso. Per esempio il 15 è un numero ellittico perché la somma dei divisori è $1 + 3 + 5$ che è minore di 15, mentre il 12 è un numero iperbolico perché la somma dei divisori è $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$ che supera il 12. Naturalmente i numeri perfetti sono relativamente rari e gli antichi ne conoscevano soltanto quattro, e precisamente i primi quattro ossia: 6, 28, 496, 8128. Non si conoscono numeri perfetti dispari; quelli pari devono terminare per 6 o per 8, e sono dati dalla formola di Euclide $2^{r-1}(2^r - 1)$ se l'esponente r è primo e così pure è primo il fattore $2^r - 1$; e, siccome non si conosce una regola generale per riconoscere i numeri primi, lo studio dei numeri perfetti presenta ardue difficoltà e se ne conosce poco più di una decina. Il sei è numero perfetto in questo senso anche moderno del termine matematico.

Un'altra proprietà dei sei è questa: La somma dei suoi fattori è eguale al loro prodotto, cioè $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Anzi è questo il solo caso in cui ciò avviene per tre numeri consecutivi positivi. Infatti, indicando con x il termine medio, deve essere

$$(x - 1) + x + (x + 1) = (x - 1) x (x + 1)$$

ossia $3x = x^3 - x$, e, dividendo per x , deve essere $3 = x^2 - 1$ ossia $x^2 = 4$ ed $x = 2$. Il due è dunque la sola soluzione^o: e quindi la sola terna di numeri consecutivi la cui somma è eguale al prodotto è costituita dalla triade 1, 2, 3 ossia dalla monade, dalla diade e dalla triade.

In quanto il sei risulta dalla moltiplicazione del due, il principio femminile, per il primo numero dispari cioè maschile, esso era chiamato *gamos* ed era pitagoricamente il numero sacro ad Afrodite. Osserviamo a questo proposito che, secondo Matila G. Ghyka, un romeno autore di due opere assai pregevoli e diffuse e di grande interesse in specie per lo studio dell'architettura sacra, il numero pitagoricamente sacro ad Afrodite sarebbe il 5 e non il sei (¹⁷). Il Matila G.

(¹⁷) MATILA C. GHYKA, *L'esthétique des proportions et dans les arts*; cfr. dello stesso autore, *Le Nombre d'Or*, 1931.

Ghyka basa questa sua affermazione sopra un unico passo di Nicomaco, il quale rileva una analogia ⁽¹⁸⁾ *anche* tra il cinque ed Afrodite perché il cinque è la somma del due e del tre; ma si tratta di una semplice analogia riconosciuta solo da questo tardo pitagorico, mentre il sei è identificato con Afrodite non soltanto dallo stesso Nicomaco ⁽¹⁹⁾, ma corrisponde ad Afrodite anche secondo altri autori antichi, come Lido, Moderato e San Clemente ⁽²⁰⁾. Il Matila G. Ghyka non tiene alcun conto di questa circostanza, anzi non ne fa neppure cenno, ed afferma che cinque era per i pitagorici il simbolo della generazione e del matrimonio; e di questa sua, affermazione errata si serve per attribuire un carattere pitagorico ad una sua teoria, anzi alla sua teoria centrale, secondo la quale il cinque è il simbolo ed il numero della vita organica mentre il sei è il simbolo ed il numero della vita inorganica. Egli presenta questa sua teoria come una teoria pitagorica che Pitagora avrebbe adombrato prendendo appunto il cinque come numero di Afrodite. Questo non è vero; e, qualunque possa essere il valore filosofico e scientifico della teoria del Ghyka, essa è una teoria di questo scrittore moderno e non una teoria pitagorica. Pitagoricamente il numero di Afrodite è il sei e non il cinque.

Il terzo numero della decade che si ottiene mediante la moltiplicazione è il numero otto. Esso è un numero promeco perché $8 = 2 \cdot 4$, ma nello spazio è il primo numero cubico, come il quattro era nel piano il primo quadrato. Ora i numeri cubici hanno nello spazio una raffigurazione analoga a quella dei quadrati nel piano ed anche essi crescono conservando la similitudine della forma. Quindi anche i cubi il cui spigolo è un numero pari ed in particolare il due si sottraggono al carattere generale dei numeri pari ⁽²¹⁾.

Il quarto ed ultimo numero della decade che si ottiene mediante una moltiplicazione è il nove) che è il quadrato di tre, ossia di un numero che era considerato perfetto per ragioni che vedremo in seguito, e che anche oggi è tenuto per antonomasia in conto di numero perfetto) per esempio dagli enigmisti. Il nove è l'ultimo numero monadico, ossia in termini moderni è l'ultimo numero di una sola cifra; con esso si conclude l'enneade dei numeri essendo il dieci una nuova unità, e perciò è pitagoricamente perfetto. Uno scrittore antico, lo Pseudo Plutarco, enumera le ragioni della perfezione del numero nove ⁽²²⁾, dicendo: «Il novenario è perfettissimo perché è il primo quadrato dispari, ed è imparimente impari perché si divide in tre triadi le quali nuovamente si dividono in tre unità».

Dante nella *Vita Nova*, ossia vita posteriore alla iniziazione, fa un uso insistente di questo «perfetto numero nove» ⁽²³⁾, rilevando che questo numero era amico di Beatrice, e che egli era nel nono anno quando vide Beatrice per la prima volta, ed arriva al punto di identificare Beatrice con questo numero. Egli spiega le ragioni, parte almeno, che giustificano questa sua considerazione del numero nove, e perché ⁽²⁴⁾ «questo numero fosse in tanto amico di lei cioè della gloriosa donna, della mia mente, la quale fu chiamata da molti Beatrice», e dice che «più sottilmente pensando, e secondo la infallibile veritate, questo numero fue ella medesima, per similitudine dico, e ciò intendo così: lo numero del tre è la radice del nove, però che senza numero altro alcuno, per sé medesimo fa nove, siccome vedemo manifestamente che tre via tre fa nove». Il criterio di perfezione per Dante è il criterio classico, pitagorico, ed egli stesso lo specifica riportando ⁽²⁵⁾ quanto dice Aristotile nel settimo della *Fisica* a proposito della perfezione: «Ciascuna cosa è massimamente perfetta quando tocca e aggiugne la sua virtu

⁽¹⁸⁾ Cfr. A. DELATTE, *Etudes*, pag. 159.

⁽¹⁹⁾ Cfr. DELATTE, *Etudes*, 152, 156.

⁽²⁰⁾ Cfr. DELATTE, *Etudes*, pag. 196, 202, 212, 216.

⁽²¹⁾ Quattro è anche l'unico numero della decade che è composto ed in pari tempo fattore di un numero della decade stessa; infatti $2 \cdot 2 = 4$ e $4 \cdot 2 = 8$.

⁽²²⁾ Ps. PLUTARCO, *De vita et poesi Homeri*, 145.

⁽²³⁾ DANTE, *Conv.* II, 6 e *Vita Nova* XXIX.

⁽²⁴⁾ DANTE, *Vita Nova*, XXIX.

⁽²⁵⁾ DANTE, *Conv.*, IV, 16.

propria, ed allora è massimamente perfetta secondo sua natura.». Naturalmente egli si sofferma ad esporre la divisione delle creature spirituali in tre gerarchie e principati, ciascuno composto di tre ordini, in modo da dare il crisma della ortodossia alla sua concezione, ma sta di fatto che il concetto dei nove cieli non appartiene alla tradizione ebraica ed il cristianesimo ha adottato in questo, come in altre cose, la concezione pagana e più specialmente pitagorica. Insomma il nove è per Dante una potenza del tre, non contiene altri fattori che il tre, è una diretta manifestazione della Trinità, una sua potenza, che è la gloriosa donna ossia domina o signora della mente di Dante e senza dubbio di tutti gli altri «fedeli d'amore» che la chiamavano con lo stesso nome.

A meglio comprendere questo simbolismo numerico dantesco occorrerebbe esporre la interpretazione degli scritti di Dante ed in generale della letteratura medioevale secondo Dante Gabriele Rossetti ⁽²⁶⁾, Ugo Foscolo, Giovanni Pascoli e segnatamente Luigi Valli, cui non possiamo fare altro che rimandare il lettore. In Massoneria il numero nove ha speciale importanza nella determinazione delle età iniziatiche nei vari gradi del rito scozzese; e sta alla base di ogni disegno o calcolo architettonico perché la tavola da tracciare su cui tali calcoli vanno effettuati è divisa in nove caselle ed era appunto per questa ragione chiamata *tiercel boad* o tavola tripartita dagli antichi liberi muratori. Nella leggenda del terzo grado nove fratelli vanno alla ricerca di Hiram, esplorando tre a tre l'oriente, il mezzogiorno e l'occidente, per ritrovarsi il nono giorno delle ricerche in un punto determinato a settentrione.

Vedremo in seguito, occupandoci della numerazione ternaria, le ragioni arcaiche che hanno fatto del tre un numero perfetto nella accezione classica ed aristotelica della parola. Il nove, potenza del tre, è anche esso perfetto per le stesse ragioni; inoltre il nove è perfetto perché ultimo numero di una cifra, e perché è l'ultimo numero della quaterna dei numeri composti contenuti entro la decade.

Abbiamo così trovato una seconda tetractis, quella dei numeri 4, 6, 8, 9. Osserviamo che la somma dei primi quattro numeri; componenti la prima tetractis era dieci; la somma dei numeri componenti questa seconda tetractis è 27 cioè il cubo del tre, altro numero perfetto di cui dovremo occuparci. Naturalmente la prima tetractis è la tetractis per eccellenza. Essa si identifica con la decade, simboleggiata dal triangolo equilatero, ossia dalla lettera Delta, e si trovava nel santuario di Delfo. Infatti il catechismo degli Acusmatici, la setta arcaica tradizionalista pitagorica, chiede ⁽²⁷⁾: «Che cosa vi è nel santuario di Delfo?», e risponde: «La tetractis perché in essa è l'armonia, nella quale sono le Sirene». Vedremo in seguito il senso di questa risposta alquanto curiosa: per il momento contentiamoci di osservare come nel santuario di Delfo, da cui trae origine la massima: conosci te stesso, vi era il medesimo simbolo della tetractis e del Delta massonico che figura nel tempio dei liberi muratori. Evidentemente la conoscenza di sé stesso e la conoscenza della tetractis hanno fra loro una qualche relazione.

Oltre alla tetractis fondamentale gli antichi consideravano anche altre tetractis o quaterne o quaderne, e Plutarco ne distingue parecchie ⁽²⁸⁾. Egli chiama pitagorica quella composta mediante i primi quattro numeri dispari ed i primi quattro numeri pari, ossia

$$(1 + 2) + (3 + 4) + (5 + 6) + (7 + 8) = 36$$

dove il 36 è il quadrato del primo numero perfetto. Osserviamo che il 36 è il primo triangolare che sia anche quadrato: e che il sei è l'unico triangolare il cui quadrato sia ancora triangolare.

⁽²⁶⁾ *Lapsus* dell'A., che in realtà intendeva riferirsi al padre del pittore pre-raffaellita Dante Gabriele Rossetti, il ben noto dantista Gabriele Rossetti autore del *Mistero dell'Amor Platonico del Medio Evo*, opera peraltro sicuramente letta da Reghini in gioventù, a seguito della segnalazione ricevutane da Isabel Cooper-Oackley (Nota del Curatore).

⁽²⁷⁾ Cfr. DELATTE, *Etudes*, 276.

⁽²⁸⁾ Cfr. DELATTE, *Etudes*, 255.

Essa è formata dalla somma di due tetractis, quella formata dai numeri dispari $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ che è il quadrato del 4, e quella formata dai numeri pari $2 + 4 + 6 + 8$ che naturalmente è eguale al doppio della decade. Plutarco chiama tetractis platonica quella composta con i numeri dell'anima del mondo di cui la creazione è esposta nel *Timeo*; la quaterna platonica è formata dalla somma di due quaterne che hanno entrambe per primo termine l'unità e sono composte poi con le tre prime potenze del due e del tre, ossia sono: 1, 2, 4, 8 ed 1, 3, 9, 27. La prima ha per somma 15, la seconda ha per somma 40: complessivamente si ha 55 che è il decimo numero triangolare.

Veduta così la generazione dei numeri composti contenuti entro la decade, ci rimane da vedere come si pervenga ai numeri primi 5 e 7: di cui il primo compare come fattore della decade perché $2 \cdot 5 = 10$ mentre il secondo non è generato mediante moltiplicazione da nessun numero della decade e non genera alcun numero della decade. Per questa ragione il sette era assimilato a Minerva, perché la dea Atena, la Minerva dei latini e degli etruschi, era vergine, non era stata generata, ma era balzata fuori dal cervello di Giove armata di tutto punto. L'osservazione della cosa e la consacrazione a Minerva del numero sette confermano che la generazione dei numeri avveniva pitagoricamente mediante la moltiplicazione, cioè per la via che abbiamo tenuta per i numeri composti.

Bisogna ora seguire altra via. E vi sono due vie, l'una indipendente dall'altra, che conducono entrambe ai numeri cinque e sette; una partendo dalla considerazione del tetracordo di Filolao, l'altra partendo dalla considerazione dei numeri poligonali e piramidali.

Secondo Archita ⁽²⁹⁾, pitagorico di poco posteriore a Pitagora, vi sono tre progressioni: aritmetica, geometrica ed armonica, e Giamblico attesta ⁽³⁰⁾ che nella scuola di Pitagora si consideravano le tre medie aritmetica, geometrica ed armonica. Ci è necessario ricordare che secondo i pitagorici si ha proporzione aritmetica tra quattro numeri a, b, c, d quando $a - b = c - d$; e nel caso particolare della proporzione continua, ossia se i due medii b e c sono eguali, ossia se la proporzione è $a - b = b - c$, il termine medio si chiama il medio aritmetico o la media aritmetica di a e c , ed è eguale alla loro semi somma, cioè

$$b = \frac{a + c}{2}$$

Se invece di numeri si hanno segmenti a, b, c, d la definizione di proporzione aritmetica e di media aritmetica è la stessa. Analogamente si ha proporzione geometrica tra quattro numeri quando $a : b = c : d$; e nel caso della proporzione continua cioè se $b = c$ la proporzione diviene $a : b = b : c$, e b è il medio proporzionale tra a e c ; e si ha $b = \sqrt{a c}$. Se invece di numeri si hanno dei segmenti la definizione di proporzione geometrica è la medesima; ed il segmento media proporzionale tra due segmenti a e c è detto anche medio geometrico. Questo segmento si può sempre costruire nella geometria pitagorica, anche se i segmenti dati non sono commensurabili, mediante una applicazione del teorema di Pitagora; e questa costruzione nonché la dimostrazione del teorema di Pitagora sono indipendenti dal postulato delle parallele o postulato di Euclide, come abbiamo mostrato in altro studio ⁽³¹⁾

Si dice in fine che i quattro numeri a, b, c, d sono in proporzione armonica quando i loro inversi sono in proporzione aritmetica cioè quando

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$$

⁽²⁹⁾ Fram. 2 riportato dal MIELI, *Le scuole eleatica, jonica e pitagorica*, Firenze 1916, pag. 251.

⁽³⁰⁾ JAMBLICHI, *Nicomachi Arithm. introduc.*, ed. Teubner, pag. 100

⁽³¹⁾ Cfr. A. REGHINI, *Per la restituzione della geometria pitagorica*, Roma 1935.

$$a \quad b \quad c \quad d$$

ed in particolare si ha proporzione armonica continua quando

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

Il numero b è quindi il medio armonico tra a e c quando l'inverso di b è eguale alla media aritmetica degli inversi di a e di c . Questa definizione differisce dalla definizione tramandataci dal pitagorico tarentino Archita nel suo frammento ma è equivalente ad essa, e dalle due definizioni si traggono le medesime conseguenze.

Dalla definizione di medio armonico cioè dalla relazione

$$\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2}$$

si ricava

$$b = \frac{2 a c}{a + c}$$

che si può anche scrivere

$$b \cdot \frac{a + c}{2} = a c$$

e per la proprietà fondamentale delle proporzioni si ha pure

$$a : \frac{a + c}{2} = b : c$$

e quindi anche

$$a : \frac{a + c}{2} = \frac{2 a c}{a + c} : c$$

importante relazione che si trova in Nicomaco. Questa proporzione permette la costruzione del segmento medio armonico tra due segmenti a e c assegnati.

Secondo Giamblico ⁽³²⁾ Pitagora avrebbe appreso questa importante proporzione in Babilonia e per primo la avrebbe trasportata in Grecia. In questa proporzione babilonese gli estremi sono due numeri o due segmenti qualunque a e c , ed i medii sono rispettivamente la loro media aritmetica e la loro media armonica. Siccome poi il rettangolo di lati a e c equivale al quadrato di lato $\sqrt{a c}$ sussiste anche la proporzione

⁽³²⁾ Cfr. G. LORIA, *Le scienze esatte ecc.*, 36.

$$\sqrt{ac} : \frac{a+c}{2} = \frac{2ac}{a+c} : \sqrt{ac}$$

nella quale figurano le tre medie aritmetica, geometrica ed armonica. La proprietà espressa da questa relazione si può enunciare dicendo che la media geometrica tra due numeri o segmenti a e c è anche media geometrica tra la loro media aritmetica e la loro media armonica. Dati i due segmenti a e c la geometria pitagorica insegna a costruirne le loro medie aritmetica, geometrica ed armonica anche se i segmenti sono incommensurabili, ed il tutto indipendentemente dalla teoria delle parallele e dal relativo postulato. Se si tratta di numeri si può determinare in quali casi le tre medie aritmetica, geometrica ed armonica di due interi a e c sono dei numeri interi, ma ci asteniamo da questa digressione.

Nel caso particolare in cui sia $a = 2c$ la proporzione babilonese diviene:

$$a : \frac{3}{4} a = \frac{2}{3} a : \frac{a}{2}$$

e se $a = 1$

$$1 : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$$

Questa quaterna contiene i numeri che sono le misure rispettive delle lunghezze delle quattro corde come del tetracordo di Filolao. Esso non è altro che la lira di Orfeo ⁽³³⁾, cioè lo strumento col quale si accompagnava la recitazione ed anche il canto. Se la prima corda emette il suono del nostro *do* la quarta corda, avendo lunghezza metà, emette il suono di frequenza doppia, ossia la prima armonica del *do*, ossia il *do* dell'ottava superiore, mentre i suoni emessi dalle altre due corde sono rispettivamente quelli del *fa* e del *sol*. La prima armonica del *sol* è anche seconda armonica del *do*, e per la proporzionalità anche la prima armonica del secondo *do* coincide con la seconda armonica del *fa*. L'orecchio percepisce e gradisce queste concordanze ed accordi.

Inoltre, osserva il Tacchinardi ⁽³⁴⁾, «è notevole che il tetracordo contiene gli intervalli più caratteristici della voce nella declamazione. Infatti interrogando la voce sale di una quarta; rinforzando cresce ancora di un grado; ed in fine, concludendo, ridiscende di una quinta». Occorre anche tenere presente che ⁽³⁵⁾ «l'accento indo-europeo era un accento di altezza; la vocale tonica era caratterizzata, non da un rinforzo della voce, come in tedesco ed in inglese, ma da una elevazione. Il tono greco consisteva in una elevazione della voce, la vocale tonica era una vocale più acuta delle vocali atone. L'intervallo è dato da Dionigi di Alicarnasso come un intervallo di una quinta». E nel tetracordo di Filolao il *sol* è la quinta del *do* ed il *do* della seconda ottava è la quinta del *fa*.

Una tradizione riportata da Diogene Laerzio racconta come Pitagora ascoltando i suoni emessi dai martelli di un fabbro che batteva sopra l'incudine osservò che l'altezza di questi suoni dipendeva dalla grossezza dei martelli, e poi sperimentando con corde egualmente tese tratte da una stessa corda, trovò che al diminuire della lunghezza della corda il suono si elevava, e che si ottenevano dei suoni di cui l'orecchio percepiva l'accordo quando i rapporti delle lunghezze delle corde erano espressi da rapporti numerici semplici. Se la tradizione riportata da Diogene Laerzio è vera sarebbe questo il primo esempio di scoperta scientifica ottenuta col metodo

⁽³³⁾ La lira e la cetra (da cui chitarra e chitarra) che ne differisce di poco, era lo strumento di Orfeo, di Anfione, di Apollo. Anfione col suono della lira si racconta abbia costruito le mura di Tebe, Orfeo col suono della lira esercitava una azione sugli animali e sulle piante.

⁽³⁴⁾ TACCHINARDI, *Acustica musicale*, Milano, Hoepli, 1912, pag. 175.

⁽³⁵⁾ Cfr. A. MEILLET, *Aperçu d'une histoire de la langue grecque*. Paris, 1912, pag. 22; vedi anche pag. 296.

ortodosso scientifico della osservazione seguita dall'esperimento; e, siccome i più semplici rapporti numerici possibili sono i tre rapporti: $1 : 2$, $2 : 3$, $3 : 4$, Pitagora avrebbe riconosciuto sperimentalmente che, prendendo una corda unitaria e tre corde aventi per lunghezza quella dei tre precedenti rapporti, si otteneva proprio la lira di Orfeo o tetracordo di Filolao. Inoltre, disposte le corde nell'ordine decrescente delle loro lunghezze $1, 3 : 4, 2 : 3, 1 : 2$, era immediata la constatazione che esse formano una proporzione geometrica, che la seconda corda ha per lunghezza la media aritmetica delle lunghezze delle corde estreme, e che la terza corda è la media armonica. E, se si accetta la tradizione riportata da Giamblico, può darsi che la conoscenza della proporzione babilonese abbia indotto Pitagora a sperimentare con corde aventi quelle lunghezze ed a constatare con l'orecchio l'accordo dei suoni da esse emessi e la loro identificazione coi suoni emessi dalle corde della lira di Orfeo e tetracordo di Filolao. Comunque si può immaginare l'ammirazione che questa scoperta deve avere destato nei pitagorici; con i numeri della tetractis si ottiene la tetractis delle corde del tetracordo di Filolao; e le lunghezze di queste corde non sono altro che il caso più semplice della proporzione babilonese:

Vale in fine la pena di osservare come queste misure possono anche essere suggerite dalla considerazione dei numeri lineari, poligonali e piramidali, oggetto importante dell'aritmetica pitagorica. Infatti se in un segmento lungo h si prende il punto medio, il segmento è diviso in due segmenti ciascuno lungo $1 : 2$ di h . Se poi si considera il quarto numero triangolare ossia la tetractis e si suppone che la forma sia quella di un triangolo equilatero è facile riconoscere intuitivamente che vi sono punti situati sul contorno del triangolo ed un solo punto centrale, che le tre altezze del triangolo si incontrano in questo punto, che esso è equidistante dai tre vertici ed equidistante dai tre lati, e che esso divide le tre altezze in due parti di cui la minore è la metà della maggiore e la terza parte dell'intera altezza h , e la maggiore è $2 : 3$ di h . Il riconoscimento rigoroso di questa proprietà richiede lo sviluppo della geometria pitagorica che sarebbe troppo lungo riportare; ci limitiamo perciò a rimandare il lettore al nostro lavoro sopra la geometria pitagorica ⁽³⁶⁾

Abbiamo così trovato che il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero di altezza h è eguale ai due terzi di questa altezza. In modo analogo ed usufruendo della isotropia del tetraedro regolare si riconosce che, se i punti costituenti il quinto numero tetraedrico sono disposti in modo che le basi siano dei triangoli regolari, essi si possono disporre in cinque piani equidistanti, di cui il primo passante pel vertice del tetraedro, il secondo contenente tre punti, il terzo sei, il quarto dieci punti formanti la tetractis, ed il quinto la base triangolare del tetraedro. Il centro della tetractis appartiene anche al numero tetraedrico, e si riconosce intuitivamente (ma si può dimostrare) che le quattro altezze del tetraedro sono eguali, che esse si incontrano in un punto che appartiene alle quattro tetractis situate al di sopra delle quattro basi, e che questo centro del tetraedro divide ogni altezza in due parti di cui la minore è $1 : 4$ dell'altezza, mentre la maggiore è $3 : 4$ dell'altezza. Così il raggio della sfera circoscritta al tetraedro regolare è il triplo del raggio della sfera inscritta ed è $3 : 4$ dell'altezza del tetraedro. La proprietà si può enunciare dicendo che, presi un segmento h , la tetractis di altezza h e il tetraedro di altezza h , l'intero segmento h e la sua metà sono gli estremi di una proporzione geometrica di cui gli altri termini sono il raggio della circonferenza circoscritta alla tetractis ed il raggio della sfera circoscritta al tetraedro. Considerando quindi la tetractis di altezza h ed il tetraedro di eguale altezza, accade che il raggio della circonferenza circoscritta alla tetractis è la media armonica dell'altezza e della sua metà, ed il raggio della sfera circoscritta al tetraedro è la media aritmetica dell'altezza e della sua metà.

⁽³⁶⁾ A. REGHINI, *Per la restituzione della geom. pit.*

Vediamo ora come si passa dal tetracordo fondamentale di Filolao alla scala o gamma pitagorica di sette note.

Ma prima di lasciare questo argomento facciamo ancora una osservazione sempre in connessione alla legge di quinta, ossia al rapporto 2 : 3. Cicerone cercando in Siracusa la tomba di Archimede la poté ritrovare ed identificare perché sopra di essa vi era la figura del cilindro e del cono equilatero circoscritti alla sfera. Archimede aveva infatti scoperto che la superficie totale del cilindro circoscritto ($6\pi r^2$) era media proporzionale tra la superficie della sfera ($6\pi r^2$) e quella del cono equilatero circoscritto ($9\pi r^2$), avente cioè il diametro della base eguale all'apotema; e così pure aveva dimostrato che il volume del cilindro ($2\pi r^3$) era media proporzionale tra quello della sfera

$$\left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

e quello del cono equilatero circoscritto ($3\pi r^3$). La scoperta e la proprietà dovevano essere considerate importanti e meritevoli di figurare sulla tomba del grande geometra. Se ne deduce colla massima facilità che i quattro rapporti, tra la superficie della sfera e quella totale del cilindro circoscritto, tra i volumi dei due solidi, tra la superficie del cilindro e la superficie totale del cono equilatero circoscritto e tra i volumi dei due solidi, sono tutti e quattro eguali al l'apporto 2 : 3, cioè al rapporto di quinta, il rapporto *do : sol* fondamentale del tetracordo di Filolao, l'intervallo caratteristico della elevazione nella lingua parlata così apprezzato da Dionigi di Alicarnasso.

CAPITOLO III

La terna dei numeri primi dispari entro la decade

*A che cosa alludono questi numeri?
Ai numeri sacri proposti alla meditazione
degli Apprendisti, dei Compagni e dei
Maestri.*

Catechismo del 3° grado.

Partiamo dal tetracordo di Filolao *do, fa, sol, do* le cui corde hanno rispettivamente le lunghezze 1, 3 : 4, 2 : 3, 1 : 2 tali che

$$1 : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$$

ed in cui il secondo termine è la media aritmetica degli estremi ed il terzo è la media armonica degli estremi, mentre il quarto è la metà del primo.

Gli ultimi due termini si possono considerare come i primi due termini di una nuova proporzione in cui il quarto termine sia, come nel caso della proporzione precedente, la metà del primo ovvero sia 1 : 3 ed il terzo termine x vada calcolato opportunamente. Sia dunque

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{1}{3}$$

ossia

sol do x sol

il nuovo tetracordo.

La lunghezza della terza corda si può calcolare in varie maniere, come terzo incognito di una proporzione, come media armonica degli estremi...

Si trova in tal modo $x = 4 : 9$; e, siccome questa corda viene minore di 1 : 2 essa è esterna al tetracordo, e se ne prende invece la sua armonica inferiore contenuta nel primo tetracordo che avrà lunghezza doppia ossia 8 : 9. Si ottiene così una nuova corda, compresa entro le corde estreme del tetracordo fondamentale, corda che noi designiamo con *re*, e si ha la catena di rapporti eguali

$$1 : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{4}{9} : \frac{1}{3} = \frac{8}{9} : \frac{2}{3}$$

ed il nuovo tetracordo

sol do re sol

Operando ancora come prima, ossia, prendendo come primi termini di una nuova proporzione o tetracordo gli ultimi due termini della proporzione ,o tetracordo precedente e prendendo come prima per quarto termine la metà del primo, si ottiene

$$\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = x : \frac{4}{9}$$

e si ricava per la x il valore $x = 16 : 27$ che supera $1 : 2$. La corda che ha questa lunghezza è quindi compresa entro le corde estreme del tetracordo fondamentale, ed è quella che noi chiamiamo *la*. Abbiamo quindi un terzo tetracordo

re sol la re

e la proporzione

$$\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{16}{27} : \frac{4}{9}$$

Procedendo analogamente si ha la proporzione

$$\frac{16}{27} : \frac{4}{9} = x : \frac{8}{27}$$

da cui si ricava $x = 32 : 81$; e siccome questa frazione è minore di un mezzo si prende la corda che ne è l'armonica inferiore ossia che ha la lunghezza $64 : 81$. Questa corda corrisponde al *mi* della scala pitagorica (sebbene il *mi* della scala naturale abbia una lunghezza $4 : 5$) leggermente differente). Si ha dunque il quarto tetracordo

la re mi la

ossia

$$\frac{16}{27} : \frac{4}{9} = \frac{64}{81} : \frac{16}{27}$$

Considerando analogamente la nuova proporzione

mi la x mi

ossia

$$\frac{64}{81} : \frac{16}{27} = x : \frac{32}{81}$$

si ottiene $x = 128 : 243$ che supera $1 : 2$, e quindi questa corda che è il nostro *si* è compresa entro le corde estreme del tetracordo fondamentale. Si ha quindi il quinto tetracordo *mi la si mi*.

Se ora si considera il tetracordo *si mi x si* ossia

$$\frac{128}{243} : \frac{32}{81} = x : \frac{64}{243}$$

si trova per la x il valore $x = 128 : 729$, di cui occorrerebbe prendere l'armonica inferiore dell'armonica inferiore ossia la corda di lunghezza $512 : 729$ per ottenere una corda compresa entro il tetracordo di Filolao; ma l'intervallo tra questa corda e quella del $fa = 3 : 4$ è troppo piccolo perché l'orecchio possa distinguere i due suoni, e perciò a questa corda si sostituisce il fa e si ha il sesto tetracordo

si mi fa si

In fine considerando il tetracordo $fa si x fa$ cioè la proporzione

$$\frac{3}{4} : \frac{128}{243} = x : \frac{3}{8}$$

si ottiene $x = 1 : 2$ e si ha quindi il settimo tetracordo

fa si do fa

Con questo settimo tetracordo il ciclo si chiude, perché seguitando ad operare come abbiamo fatto sin ora si ritroverebbe il sol , e via di seguito.

Partendo adunque dalle tre note del tetracordo di Filolao do, fa, sol ed operando sempre con la stessa legge abbiamo trovato altre quattro note e non più. La gamma pitagorica per questa ragione è costituita da sette note, le quali scritte secondo l'ordine decrescente delle lunghezze delle corde sono:

do re mi fa sol la si do

dove l'ottava è l'armonica superiore della prima ed è la prima dell'ottava superiore. Come è noto, si assume per convenzione internazionale come la della terza, ottava la corda che ha la frequenza di 435 vibrazioni al minuto secondo, ed è allora facile calcolare la frequenza delle altre corde.

Ora la terza corda del tetracordo di Filolao, cioè il sol , è la quinta dell'ottava; e col procedimento ora esposto per estendere il tetracordo alla scala delle sette corde dal sol abbiamo ottenuto la terza corda del secondo tetracordo (che comincia col sol) la quale è la *quinta* rispetta alla nuova ottava che principia col sol ; e così seguitando lo sviluppo con questa legge di *quinta* si determinano tutte le sette note. Dalle prime tre corde del tetracordo di Filolao, le cui lunghezze sono determinate in base ai numeri della tetractis ed alla proporzione babilonese, mediante la legge di *quinta* si determinano le *sette* corde. Sono i numeri primi tre, cinque, sette dispari contenuti entro la decade, corrispondenti alle età iniziatiche della massoneria azzurra, e per la periodicità della gamma la settima corda è anche l'ultima e ne deriva la perfezione del numero sette.

Le sette corde, scritte ordinatamente in modo che ogni corda sia seguita dalla sua quinta, si succedono nell'ordine

do sol re la mi si fa do;

e, se si divide una circonferenza in sette parti eguali ed in corrispondenza dei punti di divisione si scrivono le sette note in questo ordine e poi si contano i punti di tre in tre a partire dal do , si ottengono ordinatamente le sette note nell'ordine della scala musicale; viceversa scritte le sette note nell'ordine della scala musicale in corrispondenza dei sette punti di divisione della circonferenza e contando i punti di cinque in cinque a partire dal do , si ottengono ordinatamente le sette note nell'ordine di quinta.

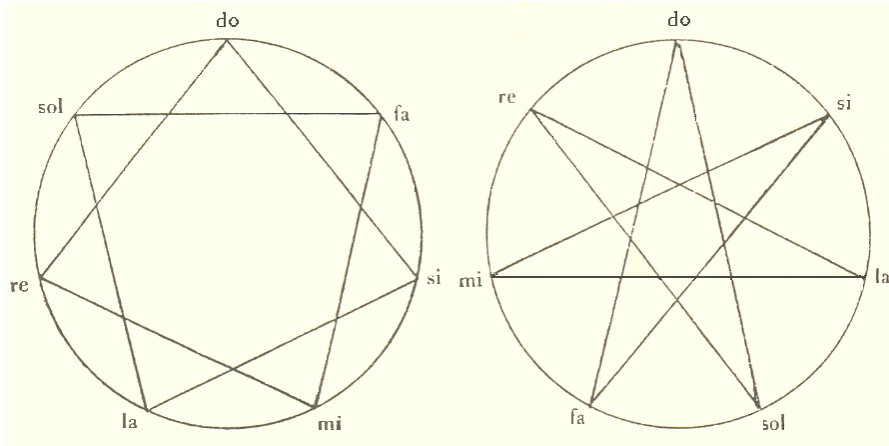


Fig. 7

Nella scala pitagorica gli intervalli o rapporti delle note dell'ottava alla nota unitaria fondamentale sono espressi ordinatamente da

$$1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{16}{27}, \frac{128}{243}, \frac{1}{2}$$

ed è facile riconoscere che per il modo con cui si è preceduto alla estensione del tetracordo tutti questi rapporti contengono al numeratore ed al denominatore solo delle potenze del due e del tre. La massima potenza del due è il $128 = 2^7$ e la massima potenza del tre è il $243 = 3^5$. La stessa cosa accade considerando i rapporti tra due note qualunque dell'ottava. Cosicché mentre nel tetracordo compaiono solo i rapporti dei numeri 1, 2, 3, 4 della tetractis, nell'eptacordo compaiono solo i rapporti delle potenze dei numeri della tetractis, e precisamente le prime nove potenze del due e le prime sei potenze del tre, oltre all'unità, ossia i numeri

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$$

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729$$

la cui somma complessiva è $2116 = 23^2$.

Anche per questa via si ottiene nella estensione del tetracordo il 5 ed il 7, perché il due vi compare alla settima e non oltre ed il tre vi compare alla quinta e non oltre.

La scala naturale differisce da quella pitagorica solo perché alla lunghezza delle corde determinate con la legge di quinta si sostituiscono dei valori approssimati espressi da rapporti più semplici e si ha:

		do	re	mi	fa	sol	la	si	do
			8	64	3	2	16	128	1
scala pitagorica	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$	
			8	4	3	2	3	8	1
scala naturale	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$	

Nella scala pitagorica i cinque «intervalli» o toni tra il *do* ed il *re*, tra il *re* ed il *mi*, tra il *mi* ed il *fa*, tra il *fa* ed il *sol*, tra il *sol* ed il *la* e tra il *la* ed il *si* sono esattamente eguali, e nella scala naturale sono sensibilmente eguali; ed in entrambe le scale questi intervalli sono maggiori dei due restanti intervalli tra il *mi* ed il *fa* e tra il *si* ed il *do*. Per ovviare a questo inconveniente i pitagorici inserirono tra gli intervalli maggiori altre cinque corde (che corrispondono ai tasti neri del

pianoforte) in modo da ottenere dodici corde di cui ciascuna differisce dalla precedente di un intervallo sensibilmente costante ed eguale a un semitono. Nella scala temperata, introdotta da Bach, questi intervalli sono tutti assolutamente eguali e le lunghezze delle dodici corde costituiscono una progressione geometrica, ma gli intervalli non sono più espressi da rapporti semplici ossia da numeri razionali ma da numeri irrazionali. Nel caso degli strumenti ad arco, in cui la lunghezza delle corde è fissata dalle dita e dall'orecchio del suonatore, il fisico Blaserna afferma che i grandi virtuosi del violino hanno la tendenza a preferire la scala pitagorica a quella naturale; ma è un po' difficile stabilire la esattezza di questa affermazione perché solo un orecchio estremamente sensibile può percepire la differenza. Constatiamo frattanto che lo sviluppo per quinte del tetracordo ci ha condotto al numero sette ed, in connessione, anche al numero dodici.

Osserviamo in fine come curiosità che, se in corrispondenza dei sette punti di divisione della circonferenza, scriviamo i nomi dei cinque pianeti noti agli antichi e quello del Sole e della Luna nell'ordine della loro distanza dalla terra cioè: Luna, Mercurio, Venere, Sole, Marte, Giove, Saturno, e procediamo come abbiam fatto per le corde della gamma andando dal primo punto (Sole) al quinto (Luna), e da questo al quinto (Marte) e così via, si ottengono i giorni della settimana nel loro ordine: Domenica (*Sun-day*), Lunedì, Martedì, Mercoledì, Giovedì, Venerdì, Sabato (*Satur-day*). Tolta la denominazione della Domenica che è cristiana e quella del Sabato che è ebraica, sono questi gli antichi nomi pagani dei giorni della settimana ancor oggi in uso in quasi tutte le lingue con qualche sostituzione ed eccezione, come il russo ed il portoghese. Cominciando la settimana con la Domenica il quinto giorno è sacro a Giove ed il sesto è il giorno di Venere, e ritroviamo la consacrazione del sei ad Afrodite.

Osserviamo però che il calendario greco non conosceva la settimana e che solo dei tardi pitagorici e dei cristiani possono aver fatto ricorso a queste considerazioni od a considerazioni equivalenti per stabilire la consacrazione dei giorni della settimana e la corrispondenza tra i pianeti ed i giorni della settimana. Notiamo in fine che la settimana del nostro calendario è una divisione convenzionale, e che i pianeti non sono affatto sette, di modo che non si può stabilire le corrispondenze tra le sette note, i sette pianeti, i sette giorni della settimana ecc. Il solo settenario che abbia base naturale è quello della scala musicale pitagorica; e la distinzione dei sette colori dell'iride fatta da Newton, evidentemente per analogia tra ottica ed acustica, è convenzionale; perché da un colore dell'iride si passa ad un altro attraverso mille sfumature e non attraverso ad un salto netto come da una nota musicale ad un'altra. Una legge settenaria compare invece nella tavola degli elementi chimici del Mendelejeff.

Notiamo per ultimo che i numeri tre, cinque e sette si possono ottenere anche e molto semplicemente dai numeri della tetractis, considerando le frazioni $1 : 2$, $2 : 3$, $3 : 4$ che esprimono le lunghezze delle tre ultime corde del tetracordo di Filolao, e sommandone numeratore e denominatore. Si ottiene in tal modo: $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 4 = 7$.

Nella letteratura pitagorica, almeno in quel poco che è pervenuto sino a noi, non si trova nulla che confermi od escluda la via che abbiamo esposto per pervenire al numero cinque ed al numero sette partendo dal tetracordo, sebbene questa via presenti delle analogie con quella tenuta dai pitagorici per dividere la circonferenza in cinque e dieci parti uguali.

Una seconda via per pervenire al numero cinque è suggerita invece da una considerazione di Plutarco. L'accento di Plutarco si trova nel *De Iside et Osiride* ⁽³⁷⁾, e si riconnette al triangolo rettangolo «egizio», il più semplice dei triangoli rettangoli in numeri interi 3, 4, 5. Geometricamente il teorema di Pitagora, che vale per ogni triangolo rettangolo, afferma che in un triangolo rettangolo la somma dei quadrati costruiti sopra i cateti equivale al quadrato costruito sopra l'ipotenusa; aritmeticamente, quando i lati del triangolo rettangolo sono dei

³⁷ PLUTARCO, *De Iside et Osiride*, ed. Didot, 457.

numeri interi, accade che la somma dei quadrati di questi interi è eguale al quadrato che ha per lato l'ipotenusa. Nel caso del triangolo egizio in cui i cateti sono il tre ed il quattro ed il cinque è l'ipotenusa, Plutarco espone una interpretazione analogica del teorema di Pitagora secondo la quale il cinque sarebbe il risultato o frutto dell'azione spirituale del tre disposto verticalmente e che simboleggia il maschio sopra la base orizzontale del quattro che simboleggia la femmina. In tal modo il cinque proverrebbe non dai numeri interi lineari ma dai numeri poligionali e precisamente dai numeri quadrati.

La terna dei numeri consecutivi 3, 4; 5 gode dunque della proprietà che la somma dei quadrati dei primi due è eguale al quadrato del terzo. Anzi è facile riconoscere che questa è la sola terna di interi consecutivi che gode di questa proprietà; infatti indicando con $x - 1$, x e $x + 1$ tre numeri consecutivi l'equazione

$$(x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2$$

ossia $x^2 - 4x = 0$ ammette le sole soluzioni $x = 0$ ed $x = 4$. Se poi invece dei quadrati si considerano tre triangolari consecutivi o tre pentagonali consecutivi o tre poligionali consecutivi di uno stesso genere r , e si cerca quando accade che la somma dei primi due poligionali è eguale al terzo, si trova che questo fatto accade solamente quando i poligionali sono dei quadrati, e precisamente nel solo caso del terzo, quarto e quinto quadrato.

Ricordiamo infatti che l' x° poligonale di genere r è espresso dalla formola

$$P(r, x) = \frac{x}{2} \left\{ (r - 2)x - (r - 4) \right\}$$

e consideriamo l'equazione indeterminata nelle incognite r ed x

$$P(r, x - 1) + P(r, x) = P(r, x + 1).$$

Essa non ammette altra soluzione che la soluzione $r = 4$, $x = 4$.

Infatti, sostituendo ai simboli le loro espressioni, tale equazione diviene:

$$\begin{aligned} \frac{(x - 1)}{2} \left\{ (r - 2)x - (r - 4) \right\} + \frac{x}{2} \left\{ (r - 2)x - (r - 4) \right\} = \\ = \frac{(x + 1)}{2} \left\{ (r - 2)x - (r - 4) \right\} \end{aligned}$$

che sviluppando e riducendo diviene:

$$(r - 2)x^2 - 4(r - 2)x + r - 4 = 0$$

ed applicando la ben nota formola risolutiva dell'equazione di secondo grado si ottiene

$$x = \frac{2(r - 2) \pm \sqrt{4(r - 2)^2 - (r - 2)(r - 4)}}{r - 2}$$

ossia

$$x = 2 + \sqrt{4 - \frac{r - 4}{r - 2}}$$

dove il discriminante è eguale a 5 per $r = 3$, è eguale a 4 per $r = 4$ ed è sempre compreso tra 3 e 4 per ogni altro valore di r . L'unico valore razionale intero e positivo della x si ha per $r = 4$ ed è $x = 4$. Dunque, come nel caso dei numeri lineari la sola terna di numeri lineari consecutivi per

la quale accade che la somma dei primi due è eguale al terzo è costituita dalla terna 1, 2, 3, così nel caso dei numeri poligonali la sola terna di numeri consecutivi poligonali dello stesso genere per i quali accade che la somma dei primi due è eguale al terzo è costituita dal terzo, quarto e quinto quadrato ossia dai lati del triangolo egizio. Il triangolo egizio si presenta sotto questo rispetto come una ipostasi della triade fondamentale 1, 2, 3. Con la terna dei numeri 3, 4, 5 avviene nella manifestazione superficiale od epifania quello che avviene nella irradiazione lineare per la terna 1, 2, 3. Il numero cinque prende il terzo posto e sostituisce il tre, come il pentagramma o stella fiammeggiante prende il posto del Delta o triangolo luminoso passando dalla camera di primo grado a quella di secondo.

I tre numeri di questa terna 3, 4, 5 sono i numeri dei lati del triangolo egizio. Ma si può dimostrare più in generale le seguenti proprietà: In un triangolo rettangolo in numeri interi primi tra loro accade sempre: 1) un cateto è pari e gli altri due lati sono dispari. 2) Il cateto pari è sempre multiplo del quattro. 3) L'ipotenusa è sempre somma di due quadrati, uno pari e l'altro dispari, e quindi è della forma $4n + 1$. 4) L'ipotenusa non è mai multiplo del tre. 5) Una dei cateti è sempre multiplo del tre. 6) Uno dei cateti è sempre multiplo del cinque. 7) Il perimetro è pari e l'area multiplo del sei.

Queste semplici ed interessanti proprietà dei triangoli rettangoli in numeri interi si possono dimostrare in varii modi, ma siccome non è facile trovar riunite queste dimostrazioni ne daremo una dimostrazione che il lettore meno esigente e diffidente potrà saltare.

Diamo anzi tutto le formole generali per i triangoli rettangoli in numeri interi primi tra loro. Indicando con x , y i cateti e con z l'ipotenusa si ha:

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$$

ed i due fattori del secondo membro devono essere entrambi dei quadrati oppure contenere un fattore comune α . In questo secondo caso la loro somma $2z$ e la loro differenza $2x$ devono avere a comune questo fattore α , e siccome x e z sono per ipotesi primi tra loro, così $2x$ e $2z$ non possono avere a comune altro fattore che l'uno od il due.

Dovrà dunque essere:

$$z + x = \alpha m^2 \quad z - x = \alpha n^2 \quad \text{con } \alpha = 1, 2$$

e perciò

$$y^2 = \alpha^2 m^2 n^2 \quad z = \alpha \frac{m^2 + n^2}{2} \quad x = \alpha \frac{m^2 - n^2}{2}$$

da cui

$$y = \alpha m n$$

e sopprimendo il fattore comune α e moltiplicando per due queste tre ultime eguaglianze si ottengono per la x , y , z le formole

$$y = 2 m n \quad z = m^2 + n^2 \quad x = m^2 - n^2$$

dove m ed n sono numeri di diversa parità, cioè uno pari e l'altro dispari, altrimenti i tre lati sarebbero pari e quindi non primi tra loro.

Il cateto pari y risulta perciò multiplo del 4, l'ipotenusa e l'altro cateto sono dispari, e quindi il perimetro è pari e l'area è pari perché è data dal semi prodotto dei cateti.

$$z + y = (m + n)^2 \quad z - y = (m - n)^2$$

$$z + x$$

$$z - x$$

$$\frac{\quad}{2} = m^2 \qquad \frac{\quad}{2} = n^2$$

Esempi:

$$m = 2, n = 1 ; x = 4, y = 3, z = 5$$

$$m = 3, n = 2 ; x = 12, y = 5, z = 13$$

La formola generale che dà l'ipotenusa $z = m^2 + n^2$ mostra che essa è sempre eguale alla somma di due quadrati, l'uno pari e l'altro dispari, e perciò è sempre della forma $4p + 1$. Il cateto dispari, se m è pari ed n dispari, è della forma $4p + 1$, perché per $m = 2h + 1$ ed $n = 2k$ si ha: $x = m^2 - n^2 = 4h^2 + 4h + 1 - 4k^2$, mentre se accade il viceversa è della forma $4q - 1$. Si può mostrare viceversa (Fermat) che esiste sempre un triangolo rettangolo in numeri interi che ha per ipotenusa un numero primo della forma $4n + 1$, e più triangoli rettangoli in numeri interi se l'ipotenusa è un prodotto di primi di questa forma.

Dimostriamo che uno dei lati è sempre multiplo del 5.

Infatti se nessuno dei cateti è multiplo del cinque essi hanno le forme

$$x = 5h \pm 1 \quad \text{oppure} \quad x = 5h \pm 2$$

$$y = 5k \pm 1 \quad \text{oppure} \quad y = 5k \pm 2$$

ma essi non possono essere entrambi della stessa forma, perché, come è facile calcolare, il quadrato dell'ipotenusa dovrebbe terminare per 2, 3, 7, 8, cosa impossibile, ed allora la somma dei loro quadrati ossia il quadrato dell'ipotenusa termina per cinque, e quindi l'ipotenusa stessa termina per cinque ossia è un multiplo di cinque.

Dimostriamo che l'ipotenusa non può essere multiplo del tre.

Infatti per assurdo se l'ipotenusa fosse multipla del tre i cateti non potrebbero esserlo, e sarebbero quindi della forma $x = 3h \pm 1$, $y = 3k \pm 1$, ed allora la somma dei loro quadrati sarebbe un multiplo del tre aumentato di due e non potrebbe essere eguale al quadrato dell'ipotenusa. L'ipotenusa è quindi della forma $3h \pm 1$.

Dimostriamo che uno dei cateti è multiplo del tre.

Infatti se uno dei cateti per esempio x non è multiplo del tre, si avrebbe:

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$$

ed essendo

$$z = 3h \pm 1 \text{ ed } x = 2k \pm 1$$

accade che in tutti e quattro i possibili casi uno dei due fattori al secondo membro risulta multiplo del tre, e quindi l'altro cateto è multiplo del tre.

Riassumendo: L'ipotenusa ed un cateto sono dispari, l'altro è multiplo del quattro; uno dei cateti è multiplo del tre e l'ipotenusa non lo è; uno dei tre lati è multiplo del cinque; l'ipotenusa è della forma $4n + 1$ ed è somma di due quadrati; il perimetro e l'area sono pari.

Se l'ipotenusa non è multipla del cinque può darsi che uno dei cateti sia multiplo del 3 e del 5 e l'altro del 4, per esempio nel triangolo (8, 15, 17); oppure che uno dei cateti sia multiplo del 3 e del 4 e l'altro del 5 per esempio nel triangolo (5, 12, 13); oppure in fine che uno dei cateti sia multiplo tanto del 3 che del 4 e del 5 per esempio nel triangolo (60, 11, 61). Se l'ipotenusa è multipla del cinque può darsi che uno dei cateti sia multiplo del 3 e l'altro del 4 come nel triangolo egizio (3, 4, 5) considerato da Plutarco; oppure che uno dei cateti sia multiplo tanto del 3 che del 4, come per esempio per i triangoli (33, 56, 65), (63, 16, 65), (44, 117, 125), Altri casi in cui un solo cateto è multiplo del 3, 4, 5 sono (119, 120, 169), (120, 391, 409) ...

Nel caso del triangolo egizio (3, 4, 5) il raggio del cerchio inscritto è 1, il diametro è 2, i cateti e l'ipotenusa sono 3, 4, 5, l'area è 6, la somma dei cateti è 7, la somma di un cateto e

dell'ipotenusa 8 e 9 ed il perimetro è 12. Il triangolo egizio era adoperato dagli egiziani per disegnare un angolo retto. Presa una cordicella suddivisa in tre parti di lunghezze rispettive 3, 4, 5, e fissati sul terreno i punti distanti 5, tendendo le altre due parti e riunendone i capi, si ottiene il triangolo egizio e quindi l'angolo retto. La squadra, che è l'utensile caratteristico del compagno libero muratore e serve alla squadratura della pietra grezza, cioè al lavoro particolare del compagno, è così connessa al numero cinque, che compare sempre in uno dei lati di un triangolo rettangolo ed ai numeri 3 e 4 che compaiono sempre in uno dei due cateti.

La questione che abbiamo risolto per i numeri poligonali si presenta anche per i numeri piramidali, ossia per i più importanti numeri dello spazio considerati dai pitagorici. Si tratta di esaminare se esiste una terna di numeri piramidali consecutivi dello stesso genere tali che la somma dei primi due sia eguale al terzo. Occorre cioè risolvere l'equazione:

$$F(x \cdot y - 1) + F(x, y) = F(x \cdot y + 1)$$

ossia

$$\begin{aligned} & \frac{(y-1)y}{6} \left\{ (x-2)(y-1) - (x-5) \right\} + \\ & + \frac{y(y+1)}{6} \left\{ (x-2)y - (x-5) \right\} - \\ & = \frac{(y+1)(y+2)}{6} \left\{ (x-2)(y+1) - (x-5) \right\} \end{aligned}$$

equazione che dopo lo sviluppo e le riduzioni diviene:

$$(y^3 - 6y^2 - y)x = 2y^3 - 15y^2 + 7y + 6$$

le cui soluzioni sono date da

$$x = 1 - \frac{3(y^2 - 3y - 2)}{y^3 - 6y^2 - y}$$

Dando alla y i valori 1, 2, 3, 4... si ottengono le seguenti coppie di soluzioni:

y	1	2	3	4	5	6	7	...
x	0	2 - 2 : 3	2 - 1 : 5	2 + 1 : 6	2 + 4 : 5	2 + 8	2 - 13 : 7	

e si vede che l'unica soluzione intera è data dalla coppia $x = 10, y = 6$. Il problema ammette dunque l'unica soluzione

$$F(10, 5) + F(10, 6) = F(10, 7)$$

ossia

$$175 + 301 = 476$$

si ha quindi la proprietà: La sola terna di numeri piramidali consecutivi di uno stesso genere, tali che la somma dei primi due è eguale al terzo, è costituita dal quinto, dal sesto e dal settimo piramidali a base decagonale.

Come la terna dei numeri (3, 4, 3) risolveva il problema nel piano mediante il triangolo rettangolo che aveva quei tre numeri per lati, così la terna dei numeri (5, 6, 7) risolve il problema analogo nello spazio mediante il quinto, sesto e settimo piramidale a base decagonale.

E come la terna (1, 2, 3) dei numeri lineari, che risolve il problema dei tre interi consecutivi in cui la somma dei primi due è eguale al terzo, dà il numero tre; e la terna (3, 4, 5), che risolve il problema nel campo dei numeri poligonali, dà il 5; così la terna (5, 6, 7) che risolve il problema nel campo dei piramidali dà il numero 7 come risultato dell'azione del cinque sul sei per adoperare il linguaggio e l'analogia di Plutarco. Osserviamo inoltre che i tre piramidali a base decagonale che risolvono il problema, e cioè i numeri 175, 301 e 476, sono tre multipli del sette. La somma delle tre terne 1, 2, 3; 3, 4, 5 e 5, 6, 7 è eguale a 36. Osserviamo in fine che la somma del numero delle diagonali del pentagono e dell'esagono è eguale al numero delle diagonali dell'eptagono, cioè $5 + 9 = 14$; ed è questo l'unico caso in cui questo fatto si verifica per tre poligoni consecutivi, ossia anche il problema di determinare tre poligoni aventi per numero dei lati tre interi consecutivi ammette una unica soluzione data dalla terna (5, 6, 7),

I primi tre numeri primi dispari cioè il 3, 5, 7 rappresentano l'unica soluzione dello stesso problema per i numeri lineari, per i poligonali di uno stesso genere e per i piramidali di uno stesso genere. Vale la pena di osservare inoltre che la soluzione si ha per i poligonali del quarto genere, ossia con i quadrati e per i piramidali ha con i piramidali del decimo genere ossia con i numeri piramidali a base decagonale. Quattro e dieci, i due numeri che Luciano identifica nel mistero della tetractis.

Il tre è il numero dei lati del delta luminoso ed è il numero dell'apprendista o novizio, il cinque è il numero della stella fiammeggiante e del compagno libero muratore; il sette è il numero della sapienza del maestro muratore o capomastro.

Quanto precede non compare naturalmente nella letteratura pitagorica ad eccezione dell'accento di Plutarco relativo al triangolo egizio. Crediamo anzi che sinora nessuno abbia dimostrato la proprietà sopra esposta relativa alla terna dei poligonali consecutivi di uno stesso genere e l'analoga proprietà relativa ai piramidali consecutivi dello stesso genere. Non è affatto nostra intenzione affermare che questo sviluppo ed estensione del teorema di Pitagora per una terna di numeri consecutivi al caso dei poligonali e dei piramidali sia già stato fatto dagli antichi pitagorici ma non vogliamo neppure escludere senza altro tale possibilità. Però attenendoci allo spirito della aritmetica pitagorica e seguendone i procedimenti siamo giunti ai risultati che abbiamo esposto, e le relative proprietà esistono effettivamente. Non abbiamo fatto altro che portarle alla luce e sottoporle alla considerazione del lettore cui lasciamo il compito di valutarne l'importanza e di trarne le conseguenze.

Aggiungiamo che si potrebbe dimostrare che l'analogo problema per i numeri iperpiramidali negli iperspazii non ammette soluzione. Dal punto di vista moderno vi sono entro la decade quattro numeri primi: 2, 3, 5, 7; e ritroveremo questa tetractis occupandoci dei poliedri regolari.

Inoltre vi sono entro la decade quattro numeri primi con il dieci e sono: 1, 3, 7, 9; ed indicando col simbolo di Gauss $\varphi(n)$ il numero dei numeri primi con n e minori di n (l'unità inclusa) si ha: $\varphi(10) = 4$, relazione tra il 4 ed il 10.

CAPITOLO IV

Il pentalfa pitagorico e la stella fiammeggiante

Non entri nella mia scuola chi ignora la geometria,
Iscrizione sull'Ingresso della Scuola di Platone.

Siamo pervenuti al numero cinque partendo dal tetracordo di Filolao o dalla considerazione del triangolo egizio. Un'altra via, affine alla prima delle due precedenti, che ha condotto i pitagorici alla valutazione del numero cinque, è quella che parte dalla considerazione della *parte aurea* o *sezione divina* di un segmento di retta, e conduce allo studio del pentalfa o pentagramma, simbolo caratteristico del sodalizio pitagorico, ossia alla stella fiammeggiante simbolo caratteristico della fratellanza massonica.

Lo studio rigoroso dal punto di vista geometrico ed aritmetico di questo argomento richiederebbe un lungo sviluppo che abbiamo già fatto in un nostro precedente lavoro ⁽³⁸⁾. Perciò ometteremo in generale le dimostrazioni rimandando il lettore a questo nostro lavoro, in cui si perviene ai risultati ed alla proprietà, di cui faremo uso, pitagoricamente, ossia senza ricorrere al postulato di Euclide.

Una delle più importanti scoperte dei pitagorici è quella delle grandezze incommensurabili e conseguentemente dei numeri irrazionali. Il caso più semplice è quello della incommensurabilità della diagonale e del lato di un quadrato, ed Aristotile riporta la dimostrazione che ne davano i pitagorici. Essa è una conseguenza del teorema di Pitagora. Infatti se per assurdo la diagonale ed il lato del quadrato ammettessero una comune misura, se cioè la diagonale contenesse m volte un certo segmento ed il lato lo contenesse n volte, il quadrato costruito sul lato si potrebbe suddividere in n^2 quadratini tutti eguali ed aventi per lato questo comune segmento, ed il quadrato costruito sulla diagonale si potrebbe suddividere in m^2 quadratini eguali ad essi: ed essendo pel teorema di Pitagora la somma dei quadrati costruiti sopra i cateti equivalente al quadrato costruito sopra l'ipotenusa bisognerebbe che il numero dei quadratini $2 n^2$ contenuti entro i quadrati dei cateti fosse eguale al numero dei quadratini m^2 dell'ipotenusa, cioè dovrebbe essere $2 n^2 = m^2$. Ora essendo n ed m due numeri interi, i due numeri della precedente eguaglianza dovrebbero contenere gli stessi fattori primi perché un numero si può decomporre in un unico modo in un prodotto di fattori primi; e questo non è possibile perché m dovrebbe contenere il due e quindi m^2 conterrebbe il due un numero pari di volte ed allora anche n dovrebbe contenere il due, n^2 lo conterrebbe un numero pari di volte e $2 n^2$ lo conterrebbe un numero dispari di volte.

In particolare se il lato del quadrato è uno, il quadrato della diagonale è due e la diagonale è eguale al numero irrazionale $\sqrt{2}$. Siccome poi, dividendo la circonferenza in quattro parti eguali e riunendo ordinatamente i quattro punti di divisione, si ottiene il quadrato inscritto, si può anche dire che il lato del quadrato inscritto nella circonferenza di raggio unitario ha per misura il numero irrazionale $\sqrt{2}$. Questo segmento incommensurabile col segmento unitario si determina geometricamente colla massima semplicità. In simil modo considerando il

⁽³⁸⁾ A. REGHINI, *Per la restituzione delle geom. pit.*

triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa è doppia del cateto minore si troverebbe che il cateto maggiore ha per misura il numero irrazionale $\sqrt{3}$, e considerando il triangolo rettangolo che ha un cateto doppio dell'altro si troverebbe che l'ipotenusa ha per misura $\sqrt{5}$. E, siccome è facile dimostrare che il lato dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza è eguale al raggio della circonferenza, ne segue che il lato del triangolo equilatero inscritto è eguale al segmento che ha per misura $\sqrt{3}$. I due numeri irrazionali $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ sono rispettivamente la misura del lato del quadrato e del lato del triangolo regolari inscritti nella circonferenza, e sono due segmenti incommensurabili col segmento unitario di cui è facile la determinazione per via geometrica.

Il numero $\sqrt{5}$ è connesso invece, sebbene in modo meno semplice, con la divisione della circonferenza in dieci e cinque parti eguali, e con la misura del lato del pentagono inscritto e del lato del decagono regolare inscritto. Si chiama *parte aurea* di un segmento od anche *sezione divina* quella parte del segmento tale che il quadrato che ha questo lato equivale al rettangolo che ha per lati l'intero segmento e la parte rimanente. La determinazione per via geometrica della parte aurea di un segmento si può ottenere mediante due costruzioni; e con la teoria delle proporzioni la parte aurea di un segmento si può anche definire come la media geometrica o proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente. Si può allora dimostrare che nel triangolo isoscele che ha l'angolo al vertice eguale alla metà dell'angolo alla base, la base è la parte aurea del lato; e, siccome tale angolo al vertice ha l'ampiezza di 36° , ne segue che, divisa la circonferenza in dieci parti eguali, il lato del decagono regolare inscritto è la parte aurea del raggio; viceversa l'arco che ha per corda la parte aurea del raggio ha l'ampiezza di 36° gradi ed è la decima parte dell'intera circonferenza. Ne segue la consueta determinazione della parte aurea del raggio O A di una circonferenza e la divisione della circonferenza in dieci parti eguali.

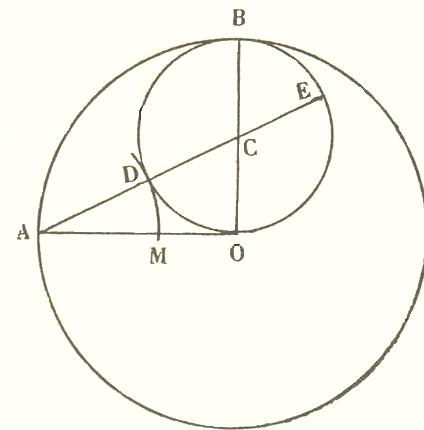


Fig. 8

Si conduce pel centro O il raggio O B perpendicolare al raggio O A e, preso il punto medio C di questo raggio O B, si descrive il cerchio di centro C e raggio C O: il diametro A C incontra questa circonferenza in due punti D, E ed accade che il raggio O A è medio proporzionale tra l'intera secante A E e la sua parte esterna A D. Dividendo questa proporzione se ne deduce che la parte esterna A D = A M è la parte aurea del raggio A O. Per l'unicità della parte aurea il triangolo isoscele di lato O A e base A D = A M ha l'angolo al vertice di 36° e quindi A M è il lato del decagono regolare inscritto; e perciò riportando il segmento A M come corda dieci

volte a partire dal punto A si divide la circonferenza in dieci parti eguali; e quindi anche in cinque prendendo alternativamente i punti di divisione ⁽³⁹⁾.

Se il raggio O A è eguale ad uno, il raggio O C è 1 : 2, l'ipotenusa A O del triangolo rettangolo A O C è

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

e la parte aurea A D ha per misura

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Quindi il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio uno è la parte aurea del raggio ed ha per misura

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Se invece di riunire il punto A di divisione della circonferenza in cinque parti eguali con il punto seguente C si riunisce il punto A col terzo punto di divisione E e questo col quinto I e così via si ottiene il pentagramma stellato così chiamato perché composto di cinque linee, detto anche pentalfa perché contiene cinque volte la lettera A formata ad esempio dalle due corde A E ed A G e dal segmento M R della corda C I. Il termine pentalfa si trova nell'*aritmetica* del padre Kircher (1665), ma il termine decalca, evidentemente formato a simiglianza del primo, si trova già in Plutarco. Comunque non è questo che ci interessa.

Siccome manifestamente I C è parallela a C E il quadrilatero C E G R è un parallelogrammo, anzi è un rombo, perché E C ed E G sono eguali come lati del pentagono regolare inscritto; ed è agevole riconoscere che il triangolo isoscele A E G ha l'angolo al vertice di 36°, e quindi che E G = E C = E M è la parte aurea del lato A E del pentalfa. Chiameremo l_5 il lato E G del pentagono regolare ed s_5 il lato A E del pentalfa; e possiamo dire che: 1° - il lato l_5 del pentagono è la parte aurea del lato s_5 del pentalfa; 2° che il lato $s_5 = A E$ del pentalfa è diviso in due punti M, N da altri due lati del pentalfa in modo che la parte A N = E M è la parte aurea di tutto il lato s_5 .

⁽³⁹⁾ Il pentagono regolare, e quindi anche il decagono ed il pentalfa, si possono costruire anche senza compasso partendo da una striscia a lati paralleli. Basta annodarla e tirare come si fa per il nodo della cravatta. Si può riconoscere e dimostrare facilmente che essa si ripiega secondo *tre* segmenti eguali A B, C D, E A ed i due segmenti D E e C B risultano anche essi uguali agli altri tre. La striscia esce dalle parti dei lati D E e C B del pentagono e si ha la figura di una mitra vescovile (la figura dell'alfiere [*bishop*] in inglese nel giuoco degli scacchi) od anche del grembiule del compagno. Il nastro dentellato o catena di unione che è avvolto ed annodato attorno alle colonne del tempio, le quali sono dieci togliendone le due colonne all'entrata del tempio, forma dieci di questi nodi pentagonali, come i dieci pentagoni regolari combacianti circoscritti ad un decagono regolare.

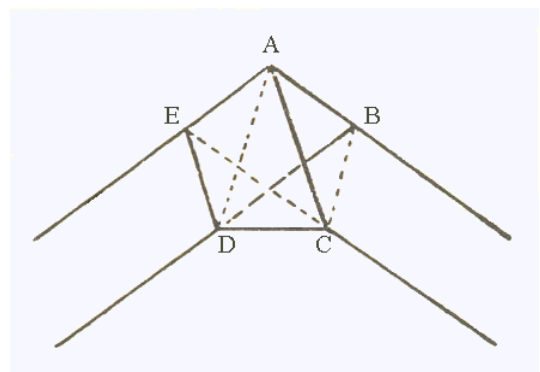


Fig. 9

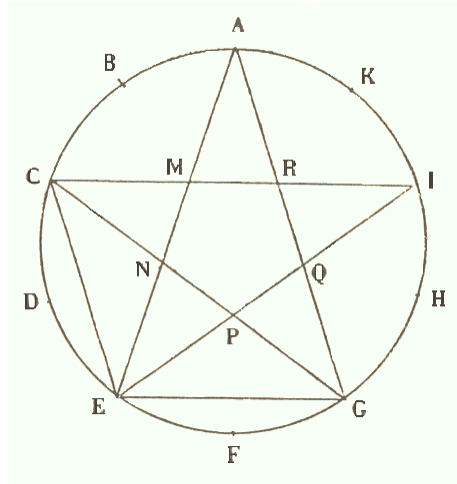


Fig. 10

Siccome poi il triangolo isoscele C E M ha l'angolo al vertice di 36° , la base C M è la parte aurea del lato E C, e siccome le cinque punte del pentagramma stellato sono manifestamente tutte eguali ne segue che A M = E N è la parte aurea di E M = A N. Perciò determinata sopra un segmento la sua parte aurea, la parte rimanente è la parte aurea della parte aurea ecc., cioè A E : A N = A N : E N = E N : N P...

I lati del pentalfa determinano un pentagono regolare M N P Q R di lato M N = l'_5 i cui vertici sono anche vertici di un altro pentalfa il cui lato s'_5 è eguale ad A M, e si ha la proporzione

$$s_5 : l_5 = s'_5 : l'_5$$

in cui ogni termine è la parte aurea del precedente.

Si ha cioè:

$$s_5 : l_5 = l_5 : s'_5 = s'_5 : l'_5$$

Il secondo pentalfa determina a sua volta un terzo pentagono inscritto di lato l''_5 ed un terzo pentalfa inscritto di lato s''_5 ecc. e si ha la catena di rapporti eguali

$$s_5 : l_5 = s'_5 : l'_5 = s''_5 : l''_5$$

nella quale ogni termine è la parte aurea del precedente.

Osserviamo *en passant* che se si considerano gli archi successivi eguali rispettivamente ad un decimo, due decimi, tre decimi e quattro decimi della circonferenza e la cui somma è eguale all'intera circonferenza, le loro corde A B, U D, D G, G A formano un quadrilatero i cui lati sono rispettivamente il lato l_{10} del decagono inscritto, il lato l_5 del pentagono inscritto, il lato s_{10} del decalfa inscritto ed il lato s_5 del pentalfa inscritto e la cui diagonale B G è un diametro e divide il quadrilatero in due triangoli rettangoli, e si ha quindi:

$$l_5^2 + l_{10}^2 + s_5^2 + s_{10}^2 = 8r^2$$

questi quattro lati formano cioè una tetractis la cui somma è eguale al doppio del quadrato del diametro.

Osserviamo ora che se con a, b, c, d indichiamo quattro segmenti tali che ciascuno sia la parte aurea del precedente si ha:

$$\begin{aligned} a &= b + c & e & & b &= c + d \\ a + d &= b + c + b - c & & & &= 2b \end{aligned}$$

Perciò il secondo termine della successione dei quattro segmenti è la media aritmetica degli estremi.

Si ha poi per la definizione di parte aurea

$$b^2 = a c \qquad c^2 = b d$$

e quindi $b^2 c^2 = a b c d$ ed in fine $b c = a d$ ed i quattro segmenti formano una proporzione.

D'altra parte indicando con M la media armonica degli estremi a, d essa è tale che

$$a d = \frac{a + d}{2} M$$

e quindi anche

$$b c = b M$$

e quindi $c = M$; ossia il terzo termine della successione è la media armonica degli estremi.

Possiamo dunque enunciare la proprietà: Se quattro segmenti sono segmenti successivi di una successione tale che ogni segmento è la parte aurea del precedente essi formano una proporzione ed il secondo segmento è la media aritmetica degli estremi ed il terzo è la media armonica degli estremi.

Anche questa proporzione tra quattro segmenti è un caso particolare della proporzione babilonese come lo era la proporzione formata dalle quattro corde del tetracordo di Filolao. Per le due quaterne accade egualmente che il secondo termine è la media aritmetica degli estremi ed il terzo la media armonica. Nel caso del tetracordo di Filolao la legge di determinazione era che il primo termine fosse il doppio del quarto: in questo caso la legge di formazione è che ogni termine sia la parte aurea del precedente.

Concludendo: il lato s_5 del pentalfa pitagorico è suddiviso da altri due lati del pentalfa stesso in due punti intermedi M ed N tali che $A E : A N = A M : M N$ che sono rispettivamente eguali ad

$$s_5, l_5, s'_5, l'_5 \text{ ossia ad } s_5, \frac{s_5(\sqrt{5}-1)}{2}, \frac{s_5(3-\sqrt{5})}{2}, s_5(\sqrt{5}-2)$$

In questa proporzione ogni segmento è la parte aurea del precedente, ed accade come nella proporzione delle quattro corde del tetracordo che il secondo segmento è la media aritmetica degli estremi ed il terzo la media armonica degli estremi. Inoltre, come la gamma pitagorica si ottiene con la legge di quinta dal tetracordo di Filolao, così ogni termine della catena dei rapporti eguali si ottiene prendendo la parte aurea del termine precedente, ossia mediante la divisione di una circonferenza in dieci e cinque parti eguali.

Con questa legge di quinta si prolunga indefinitamente il tetracordo e l'ottava nelle ottave successive e si prolunga la catena dei rapporti eguali tra il lato di un pentalfa e quello del rispettivo pentagono ed il lato del pentalfa e del pentagono consecutivi. In somma il pentalfa reca impressa nella suddivisione naturale dei suoi lati una legge di armonia perché a somiglianza della corda del *sol* che è la media armonica della corda fondamentale e della sua armonica, così il lato del pentagono è la media armonica tra l'intero lato del pentalfa e la parte di esso compresa tra altri due lati del pentalfa.

D'altra parte l'ultimo dei cinque poliedri regolari pitagorici e platonici, il dodecaedro regolare, ha dodici faccie che sono dei pentagoni regolari; e, chiamando con a l'apotema di questo poliedro, ossia con $2 a$ l'altezza del dodecaedro o la distanza tra due faccie parallele, si può dimostrare che i piani paralleli alle due basi parallele, intermedi tra esse e passanti rispettivamente per i cinque vertici del dodecaedro prossimi a tale base, dividono l'altezza $2 a$ del dodecaedro in due punti M ed N tali che, indicando con A B l'altezza



Fig. 11

il segmento $AN = BM$ è la parte aurea di AD , il segmento $AM = BN$ è la parte aurea di AN ed il segmento intermedio MN è la parte aurea del segmento AM . Questi quattro segmenti formano una tetractis analoga a quella formata dai quattro segmenti del lato del pentalfa in scritto nella faccia pentagonale del dodecaedro. Per adoperare un termine della magia si può dire che tanto il dodecaedro quanto la sua faccia portano la *segnatura* di una stessa armonia; l'armonia del pentalfa coincide con l'armonia del dodecaedro.

D'altra parte si può dimostrare che la parte aurea dell'altezza $2a$ è eguale al lato s_{10} del decalfa inscritto nella, faccia pentagonale del dodecaedro (decalfa che si ottiene riunendo i dieci punti di divisione della circonferenza in dieci parti eguali di *quattro* in quattro), si può pure dimostrare che il raggio della circonferenza circoscritta è la parte aurea del lato s_{10} del decalfa inscritto, ed in fine sappiamo che il lato I_{10} del decagono inscritto è la parte aurea del raggio r . Dimodoché la tetractis dei quattro segmenti segnati sull'altezza del dodecaedro è costituita dai quattro segmenti: $2a, s_{10}, r, I_{10}$ i quali adunque costituiscono la proporzione geometrica

$$2a : s_{10} = r : I_{10}$$

in cui, ogni termine è la parte aurea del precedente; e quindi il secondo termine è la media aritmetica degli estremi mentre il terzo termine ossia il raggio r è la media armonica degli estremi. Il dodecaedro gode dunque della proprietà: Il raggio della circonferenza circoscritta alla faccia, del dodecaedro è la media armonica tra l'altezza del dodecaedro ed il lato del decagono regolare inscritto nella faccia.

Questa terza proporzione babilonese tra la tetractis dei quattro elementi su indicati del dodecaedro è connessa anche essa con il numero dei lati della faccia pentagonale e con il numero 12 delle faccie del poliedro; come nel caso del tetracordo la proporzione babilonese era connessa con la legge di quinta, coi cinque tasti neri del pianoforte e con i dodici tasti bianchi e neri dell'ottava. Se si immagina di condurre i dodici piani paralleli alle dodici faccie del dodecaedro e passanti per i cinque vertici prossimi, essi determinano nell'interno del dodecaedro un altro dodecaedro regolare per il quale sussistono le stesse proprietà e così via indefinitamente.

Siccome nel pitagoreismo le sette scienze liberali erano strettamente connesse tra loro e strettamente connesse con le varie arti, si può prevedere che nelle varie arti si trovi la traccia dell'importanza che i pitagorici annettevano alla parte aurea ed alla media armonica. Difatti il canone della statuaria di Polycleto si connette alla considerazione della media armonica ⁽⁴⁰⁾, mentre invece la parte aurea ha una grande importanza nell'architettura pre-periclea ⁽⁴¹⁾.

Il Matila G. Ghyka chiama la parte aurea le «*Nombre d'Or*»; ed è questo il titolo della sua opera principale dedicata allo studio dell'architettura sacra di tutti i tempi. La musica, la scultura e l'architettura, le arti tutte, si conformano alla legge dell'armonia universale basata sopra le proprietà dei numeri sacri.

Per comprendere appieno quale importanza e significato dovesse avere agli occhi dei pitagorici quanto abbiamo trovato a proposito del dodecaedro bisogna ricordare che per essi e per Platone il dodecaedro era il simbolo dell'universo, e che i cinque poliedri regolari, ossia le *figure cosmiche*, erano il simbolo dei quattro elementi e dell'universo. Se vogliamo vederne il perché non vi è che da leggere il *Timeo* di Platone, il dialogo pitagorico per eccellenza.

⁽⁴⁰⁾ Cfr. L. ROBIN, *La pensée grecque*, pag. 273.

⁽⁴¹⁾ Cfr. M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2^a ed., I, 178.

Il tetraedro regolare con le sue quattro faccie triangolari, quattro vertici e sei spigoli, era il simbolo del fuoco: e può darsi che questa corrispondenza sia stata determinata dalla conformazione del solido il cui vertice ricorda la punta della fiamma, che si eleva sopra la base e sia stata avvalorata dalla errata etimologia della parola piramide usata dai greci invece di tetraedro dal greco πῦρ fuoco. Ogni faccia è suddivisa dai tre diametri della circonferenza circoscritta condotti per i vertici della faccia in sei triangoli rettangoli eguali tra loro, e, considerando i tetraedri che hanno per vertice comune il centro del tetraedro regolare e per base i 24 triangoli eguali in cui è divisa la superficie, il tetraedro consta di 24 tetraedri equivalenti. In simil modo l'ottaedro ha otto faccie che sono dei triangoli equilateri, sei vertici e 12 spigoli, quindi la superficie dell'ottaedro è suddivisa in 48 triangoli rettangoli eguali, e corrispondentemente il poliedro consta di 48 tetraedri equivalenti. Analogamente l'icosaedro consta di venti faccie che sono triangoli equilateri dodici vertici e trenta spigoli: e la sua superficie è suddivisa in 120 triangoli rettangoli eguali e l'icosaedro consta di 120 tetraedri che li hanno per base ed hanno per vertice comune il centro del poliedro. Ogni poliedro regolare ha un poliedro polare per il quale i numeri delle faccie e dei vertici si scambiano mentre il numero degli spigoli resta invariato. Il tetraedro è autopolare; il poliedro polare dell'ottaedro è il cubo che ha sei faccie quadrate, otto vertici e 12 spigoli. Filolao vedeva nel cubo l'immagine dell'armonia perché il numero dei suoi vertici è la media armonica dei numeri delle faccie e degli spigoli, cosa che naturalmente accade anche per l'ottaedro. Ogni faccia del cubo è suddivisa dai diametri della circonferenza circoscritta passanti per i vertici in quattro triangoli rettangoli isosceli eguali; quindi la superficie del cubo è suddivisa in 24 triangoli rettangoli eguali ed il cubo od esaedro consta di 24 tetraedri equivalenti il cui vertice è il centro del cubo. Dopo avere attribuito a ciascuno di questi quattro poliedri la corrispondenza con l'elemento fuoco, aria, acqua e terra, Platone fa tacere Timeo cui fa dire soltanto: «Rimane così ancora una forma di composizione che è la quinta, di quello si fu giovato Iddio per lo disegno dell'universo». Osserviamo che Platone ed i pitagorici sapevano che i poliedri regolari sono cinque e cinque soltanto, come si dimostra in modo semplice; ed osserviamo che anche per questa via delle figure cosmiche si perviene al numero cinque.

Quanto all'improvviso ed inaspettato silenzio di Platone che tronca l'esposizione dell'argomento, esso ha dato nell'occhio anche al Robin ⁽⁴²⁾, il quale si limita a dire: «*Au sujet du cinquième polyèdre régulier, le dodécaèdre... Platon est très mystérieux*» e non tenta neppure di indagare le ragioni del subito silenzio di Platone.

Ora il dodecaedro è il poliedro polare dell'icosaedro ed ha pertanto dodici faccie che sono dei pentagoni regolari, ha venti vertici e trenta spigoli. Applicando ad esso il procedimento di suddivisione precedente si trova che i diametri della circonferenza circoscritta ad una faccia passanti per i vertici la suddividono in dieci triangoli rettangoli eguali, ma se nella faccia si inscrive il pentalfa tutto il pentagono viene suddiviso dai lati del pentalfa e dai diametri passanti per i vertici del pentalfa in trenta triangoli rettangoli, i quali questa volta non sono isosceli, non sono neppure i triangoli rettangoli bellissimi cari a Timeo (cioè con l'ipotenusa doppia del cateto minore) e non sono neppure tutti eguali né equivalenti. In compenso la superficie del dodecaedro si suddivide in tal modo in 360 triangoli, e corrispondentemente il dodecaedro si decompone in 360 tetraedri che li hanno per base ed hanno per vertice il centro del poliedro. Ora 360 è il numero delle divisioni dei dodici segni dello zodiaco, ed è il numero dei giorni dell'anno egizio.

La cosa è pienamente confermata da quanto dicono due antichi scrittori. Alcino ⁽⁴³⁾, dopo avere spiegato la natura dei primi quattro poliedri, dire che il quinto ha dodici facce come lo

⁽⁴²⁾ ROBIN, *La pensée grecque*, 273.

⁽⁴³⁾ ALCINOO, *De doctrina Platonis*, Parigi, 1567, cap. II; cfr. anche l'opera di H. MARTIN, *Etudes sur le Timée de Platon*, Paris, 1841, II, 246.

zodiaco ha dodici segni. ed aggiunge che ogni faccia è composta di cinque triangoli (col centro della faccia per vertice comune) di cui ciascuno è composto di altri sei (determinati da un diametro e da due lati del pentalfa). In totale 360 triangoli. Plutarco a sua volta ⁽⁴⁴⁾, dopo avere constatato che ognuna delle dodici faccie pentagonali del dodecaedro consta di trenta triangoli rettangoli scaleni, aggiunge che questo mostra che il dodecaedro rappresenta tanto lo zodiaco che l'anno perché si suddivide nel medesimo numero di parti di essi. Plutarco allude manifestamente all'anno egizio composto di 12 mesi ciascuno di trenta giorni, nel quale i cinque giorni *epagomeni* non fanno parte dell'anno.

A ben comprendere l'importanza agli occhi dei pitagorici e di Platone di queste osservazioni matematiche occorre ricordare: 1° - che per essi il triangolo è l'*atomo* (ossia la parte ultima indivisibile) superficiale perché è il poligono avente il numero di lati necessario e sufficiente a delimitare una porzione di piano, e che corrispondentemente il tetraedro o piramide è l'atomo solido perché è il poliedro avente il numero di faccie necessario e sufficiente a delimitare una porzione di spazio. 2° - Che per la definizione stessa di numero poligonale, ogni numero poligonale è sempre somma di triangolari e per la definizione di numero piramidale ogni numero piramidale è somma di numeri tetraedrici. Sicché si veniva a constatare che anche le cinque figure cosmiche ed in particolare il simbolo dell'universo erano composti di tetraedri, l'intero universo si riduceva ad una somma di atomi tetraedrici.

Il numero dodici è il numero delle faccie del dodecaedro e conseguentemente è il numero dei vertici del poliedro polare ossia dell'icosaedro. Dodici è anche il numero degli spigoli del cubo e del poliedro polare ossia dell'ottaedro. Se consideriamo il numero dodici come costituito dai dodici vertici di un dodecaedro e sviluppiamo questo numero dodecaedrico entro uno degli angoloidi prendendone il vertice come centro di omotetia si ottengono nel solito modo pitagorico i successivi numeri dodecaedrici. Le formole dei numeri poliedrici regolari (ad eccezione del numero tetraedrico) sono state determinate la prima volta da Cartesio, e si trovano in un suo manoscritto rimasto inedito per oltre un secolo; in particolare l'*n*° numero dodecaedrico è dato dalla formola

$$Do(n) = \frac{n(3n-1)(3n-2)}{2}$$

ma l'*n*° numero dodecaedrico si può anche ottenere grazie ad una relazione tra l'*n*° numero pentagonale ed il suo gnomone. Infatti gli gnomoni pentagonali sono i numeri della serie aritmetica 1, 4, 7, 10... di modo che si ha:

$$\begin{array}{l} \text{gnomoni pentagonali} \quad 1 \ 4 \ 7 \ 10 \ 13 \ 16 \ \dots \ (3n-2) \ \dots \\ \text{numeri pentagonali} \quad 1 \ 5 \ 12 \ 22 \ 35 \ 51 \ \dots \ n \ \frac{(3n-1)}{2} \end{array}$$

ed accade che aggiungendo ad un pentagonale il suo gnomone si ottiene il pentagonale successivo, e moltiplicando un pentagonale per lo gnomone precedente si ottiene il corrispondente numero dodecaedrico. Così la successione dei numeri dodecaedrici è:

$$\text{dodecaedrici} \quad 1 \quad 20 \quad 84 \quad 220 \quad 816 \dots;$$

relazione tra i pentagonali ed i dodecaedrici che corrisponde aritmeticamente alla relazione tra il numero dei lati delle faccie pentagonali ed il numero delle faccie del dodecaedro. Anche nella

⁽⁴⁴⁾ PLUTARCO, *Questioni platoniche*, V, 1.

estensione del tetracordo all'ottava abbiamo veduto comparire una connessione tra il cinque ed il dodici. Così pure il triangolo egizio di ipotenusa 5 ha il perimetro dato dal 12.

Il numero dodici per conto suo ha già tradizionalmente un carattere sacro ed universale. Oltre ad essere il numero dei mesi dell'anno e dei segni dello zodiaco, dodici era in Grecia, Etruria e Roma il numero degli Dei consenti, dodici il numero dei componenti alcuni collegi sacerdotali nella Roma arcaica, dodici il numero delle verghe del fascio etrusco e romano; e molti dodecaedri celtici pervenutici attestano l'importanza che gli antichi annettevano a questo numero ed al dodecaedro. Fatti e ragioni che avvalorano la scelta del dodecaedro come simbolo dell'universo.

Il dodecaedro è inscritto nella sfera come nella cosmologia pitagorica il cosmo è avvolto dalla fascia, il *periékon*; e come il cosmo contiene in sé e consta dei quattro elementi fuoco, aria, terra, acqua, così i quattro poliedri regolari che ne sono il simbolo si possono inscrivere entro il dodecaedro. Si può infatti mostrare come si possa inscrivere l'esaedro o cubo nella sfera e nel dodecaedro; si può mostrare facilmente come l'icosaedro avente per vertici i centri delle dodici faccie del dodecaedro sia un icosaedro regolare inscritto; ed analogamente per l'ottaedro avente per vertici i centri delle sei faccie di un cubo, ed in fine come si ottenga dal cubo un tetraedro regolare prendendo come vertici un vertice del cubo ed i vertici del cubo ad esso opposti nelle tre faccie del cubo ivi congruenti. La tetrade dei quattro elementi è contenuta nel cosmo e questo nella fascia come i quattro poliedri regolari sono contenuti nel quinto e questo nella sfera circoscritta.

Facciamo ora una sosta e diamo un'occhiata al cammino percorso. Siamo pervenuti anzi tutto alla tetractis (1, 2, 3, 4), tetractis equivalente alla Decade, e raffigurata dal Delta esistente nel santuario di Delfo, ombelico del mondo. Questa tetractis contiene in sé stessa l'altra tetractis, quella di Filolao (1, 3 : 4, 2 : 3, 1 : 2), nella quale compaiono gli stessi elementi che compaiono nella prima; ed, estendendo il tetracordo di Filolao, abbiamo trovato la legge di quinta e siamo pervenuti ai numeri 5, 7, 12. L'ottava, o l'armonia come dicevano i Greci, è quindi contenuta potenzialmente nella tetractis di Filolao e quindi anche nella tetractis raffigurata dal Delta. Inoltre siamo pervenuti al numero cinque per via geometrica in due modi: mediante il triangolo rettangolo egizio che ha il 5 per ipotenusa e mediante il triangolo rettangolo di cateti uno e due che ha il 5 per quadrato dell'ipotenusa ⁽⁴⁵⁾.

Questa seconda via ci ha condotto alla considerazione della parte aurea, alla divisione della circonferenza in dieci e cinque parti eguali, al pentalfa, al dodecaedro, ed alla media armonica dei segmenti estremi delle due tetractis formate con gli elementi di queste due figure. Abbiamo veduto che il catechismo degli Acusmatici pone nel santuario di Delfo «la tetractis in cui è l'armonia in cui sono le Sirene». Per comprendere il senso di questa risposta del catechismo pitagorico degli Acusmatici ed il perché essi mostrassero tanto interesse per l'argomento ci resta solo da vedere che cosa rappresentino le Sirene connesse in questo modo con l'armonia. Questo simbolismo, osserva il Delatte ⁽⁴⁶⁾, è completamente estraneo alla concezione ordinaria delle Sirene e deve spiegarsi con la loro identificazione con l'armonia delle sfere e con la funzione importante riconosciuta alla musica sacra nella scuola pitagorica. Per Pitagora ⁽⁴⁷⁾ sono le Sirene che personificano questa armonia. La stessa cosa accade per Platone ⁽⁴⁸⁾. Imitando con la musica sacra questa musica celeste i pitagorici ⁽⁴⁹⁾ speravano assimilare la loro anima alla

⁽⁴⁵⁾ Anche la considerazione delle figure cosmiche o poliedri regolari conduce al numero cinque.

⁽⁴⁶⁾ DELATTE, *Etudes...*, 134.

⁽⁴⁷⁾ Cfr. DELATTE, *Etudes...*, 133.

⁽⁴⁸⁾ PLATONE, *Rep.* X, 617.

⁽⁴⁹⁾ Cfr. DELATTE, *Etudes...*, 113.

sapienza divina e tornare dopo la morte tra i beati ⁽⁵⁰⁾. Così Plutarco vede in Ulisse il filosofo che ascolta questa armonia per iniziarsi alla sapienza. Platone ⁽⁵¹⁾, occupandosi del mito di Ero, dice che l'armonia delle sfere è prodotta dal loro movimento di rivoluzione. Platone spiega allegoricamente questa armonia supponendo che una sirena collocata su ciascuna di queste sfere fa intendere la sua voce, e che l'insieme di queste voci che si accordano tra loro produce l'armonia del mondo. Secondo Giamblico ⁽⁵²⁾ la più grande rivelazione che Apollo-Pitagora ha fatto al mondo è quella dell'armonia delle sfere e della musica sapiente che se ne ispira. Giamblico segue una antica credenza pitagorica, secondo la quale Pitagora, il maestro Pitio, era una incarnazione di Apollo, cui era sacro il santuario di Delfo. La tetractis, scrive il Delatte ⁽⁵³⁾, sembra dovere a due cause la venerazione di cui era oggetto presso i pitagorici; dal punto di vista scientifico essa spiegava le leggi della musica celeste ed umana, e siccome l'armonia era la grande legge dell'universo ⁽⁵⁴⁾, la tetractis può essere considerata come la sorgente e la radice della natura, come afferma il giuramento per la tetractis; d'altra parte essa permetteva ai pitagorici di imitare con la musica sapiente l'armonia delle sfere e di approssimarsi così alla perfezione divina. La funzione catartica della musica fece della tetractis una dottrina particolarmente preziosa per il contributo che essa apportava al perfezionamento morale e religioso. Così si spiega secondo il Delatte che la tetractis fu una delle teorie fondamentali della filosofia aritmologica e religiosa dei pitagorici.

Lo sviluppo aritmetico-geometrico dei numeri sacri che abbiamo esposto va dalla considerazione del Delta o triangolo sacro a quella del dodecaedro. Gli elementi di Euclide, nel testo di Euclide, hanno inizio senza preamboli con la considerazione del triangolo equilatero e, secondo la attestazione di Proclo ⁽⁵⁵⁾, Euclide pose per scopo finale dei suoi Elementi la costruzione delle figure platoniche (poliedri regolari). Forse dal tempo di Pitagora a quello di Euclide l'inizio ed il fine della geometria rimasero tradizionalmente immutati, e la funzione di Euclide fu quella di introdurre il suo spicciativo postulato, rimaneggiando in tal modo le dimostrazioni e sostituendo per esempio la sua dimostrazione del teorema di Pitagora a quella dello stesso Pitagora che era certamente un'altra. Secondo quanto resta della geometria pitagorica e secondo la restituzione che ne abbiamo fatta una decina di anni sono, la geometria pitagorica era una geometria più generale della geometria euclidea e di quella Archimedeana in quanto che era indipendente dal postulato di Euclide delle parallele e dal postulato di Eudosso-Archimede. Il punto di partenza e quello di arrivo erano probabilmente gli stessi nelle due geometrie. In Euclide però l'intento è puramente geometrico; mentre in Pitagora, anche se lo svolgimento era puramente geometrico, l'intento non lo era certamente, perché la caratteristica della filosofia pitagorica era la connessione sempre presente delle varie scienze tra loro ed in particolare della geometria con l'aritmetica, la musica e l'astronomia. Per i Pitagorici e per Platone la geometria era, una scienza sacra, esoterica, segreta, come per i liberi muratori la geometria è l'arte regia della edificazione e la scienza dei «numeri sacri» noti solo ad essi; mentre, la geometria euclidea, spezzando tutti i contatti e divenendo fine a sé stessa, degenerò in una magnifica scienza profana. La mirabile sintesi di tutte le scienze e di tutte le arti divinata dal genio di Pitagora scomparve, e cominciò la specializzazione.

Abbiamo messo in luce qualche traccia del legame profondo che univa là musica con la cosmologia e con l'aritmetica; ma riteniamo che la scarsità e la rarità delle tracce sia da

⁽⁵⁰⁾ Cfr. GIAMBILICO, *Vita Pythagorae*, 86; CICERONE, *Rep.*, V, 2; FAVOR., *In somnium Scipionis*; PLUTARCO, *Quaestiones Conv.*, 9, 14, 6, 2.

⁽⁵¹⁾ PLATONE, *Rep.* X, 617 e DELATTE, *Etudes...*, 260.

⁽⁵²⁾ Cfr. DELATTE, *Etudes...* 65.

⁽⁵³⁾ DELATTE, *Etudes...*, 264.

⁽⁵⁴⁾ Cfr. ARISTOTILE, *Metaf.* I.

⁽⁵⁵⁾ PROCLO ap. LORIA, *Le scienze esatte...*, 189.

attribuire proprio alla importanza della dottrina che doveva costituire uno degli insegnamenti segreti della scuola pitagorica; ed un indizio e nel medesimo tempo una spiegazione la fornisce la subita riserva di Timeo nel dialogo platonico omonimo appena giunge a parlare del dodecaedro. Rivelare questo segreto sarebbe stata una empietà; e la leggenda pitagorica voleva che talora una tale empietà fosse vendicata dal *daimonion*, come era accaduto nel caso del pitagorico Ippaso che, secondo la leggenda, era morto in un naufragio per avere pubblicato proprio la iscrizione del dodecaedro nella sfera. Platone aveva detto abbastanza: dire di più sarebbe stato, se non imprudente, scandaloso, e Platone si ricorda

μη εἶναι πρὸς πάντας πάντα ῥητὰ.

Quanto al numero sette siamo potuti pervenire ad esso soltanto con la estensione del tetracordo alla gamma e mediante la considerazione dei numeri piramidali a base decagonale. Non esiste un triangolo rettangolo che abbia per ipotenusa sette né che abbia sette come quadrato dell'ipotenusa, e la stessa cosa succede per il numero undici.

Il sette è l'unico numero della decade che è senza madre e vergine, ἀμήτωρ e παρθένος: e per questa ragione, come abbiamo, già detto, era paragonato e consacrato a Minerva, figlia di Giove ma non di Giunone, perché nata balzando armata di tutto punto dal cervello di Giove. Pallade Atena ed il numero sette hanno entrambi la prerogativa della verginità e della immacolata concezione.

Se pensiamo che Minerva era notoriamente la dea della Sapienza il senso di questo simbolo si delinea abbastanza chiaro: la sapienza divina non appartiene al mondo della generazione; essa è trascendente, olimpica, umanamente inconcepibile. Aggiungiamo inoltre che la tradizione magica lega sovente il dono della veggenza e della chiaroveggenza alla verginità: la lingua greca come la lingua italiana designa con una stessa parola κόρη la vergine e la pupilla dell'occhio; e Cagliostro che adoperava le «pupille» come chiaroveggenti le chiamava pupille per questa ragione e le chiamava colombe per il loro candore.

Anche Clemente alessandrino (⁵⁶) osserva che il numero sette è vergine e senza madre, e lo scrittore cristiano Aristobulo identifica il settenario con la luce spirituale. Osserva in proposito il Delatte che questa teoria non è, come si potrebbe credere, una innovazione ebraica perché essa figura già in Filolao, come è testimoniato da un passo dei *Theologumena*: ed era stata ripresa nell'inno al numero (pitagorico-orfico) secondo attesta Aristobulo. Aristobulo dunque non aveva fatto altro, secondo la sua abitudine, che adattare questo concetto che gli faceva comodo ai bisogni dell'apologetica ebraica. Sette era del resto il numero dei savii leggendari della Grecia pre-pitagorica: e sette il numero delle scienze pitagoriche, delle arti liberali, ripartite, forse da Boezio, nelle scienze del trivio e del quadrivio.

Il cattolicesimo, a differenza delle altre sette cristiane derivate dall'ebraismo, ha recentemente aggiunto il dogma della immacolata concezione il quello della verginità di Maria: ed annette a questi dogmi tanta importanza da affrontare per sostenerli le difficoltà inerenti al fatto ben noto che il Vangelo parla a più riprese dei fratelli e delle sorelle di Gesù. La difficoltà viene superata affermando che nel Vangelo e solo nel Vangelo la parola ἀδελφός non significa fratello ma cugino. Semplicissimo e comodo. I pitagorici ed i classici, parlando della immacolata concezione e della verginità del numero sette e di Pallade Atena, non avevano bisogno di sostenersi con gli acrobatismi dell'ermeneutica: ed anche a noi queste favole del paganesimo non sembrano così assurde come prenderebbero i paladini dell'agiografia.

A noi sembra manifesta la derivazione od almeno il riferimento di questo dogma cattolico all'antico simbolismo pitagorico, come è certo che Aristobulo e San Clemente hanno attinto a fonte pitagorica. E non vogliamo soffermarci ad esaminare sino a qual punto la figura di Maria, più che ricordare quella di Minerva, ricordi la figura di Iside, come risulta da considerazioni

(⁵⁶) Cfr. DELATTE, *Etudes...*, 231 e seg.

iconografiche. Vogliamo invece accennare alle prodezze compiute da certi scrittori cristiani a spese dell'aritmetica mistica pitagorica. Per esempio Louis Claude de Saint-Martin, uno scrittore cristiano del tempo della rivoluzione francese, detto *le philosophe inconnu* ed anche *le théosophe d'Amboise*, si sbizzarrisce nei suoi scritti e segnatamente nell'opera postuma *Des Nombres* in un suo sistema di mistica cristiana dei numeri; e farneticando devotamente non si perita di affibbiare ai pitagorici supposti errori per poterli loro rinfacciare ad esaltazione della propria fede «bella, immortal, benefica, ai trionfi avvezza». Il Saint-Martin afferma per esempio ⁽⁵⁷⁾ che «*Phythagore et ses disciples se sont trompés quand ils ont dit que 7 était sans père et sans mère* e giustifica tale sua sentenza con la bella ragione che «*le nombre 4 est le père et la mère de l'homme qui, en effet selon la Genèse, fut créé mâle et femelle par cette puissance septénaire contenant 4 et 3*». Ora Pitagora ed i suoi discepoli non hanno mai detto nulla di simile, ed il filosofo sconosciuto fa tutta una confusione tra quello che narra il Vangelo a proposito di Melchisedec che era senza padre e senza madre ed il fatto che il sette era per i pitagorici un numero sacro a Minerva perché, come Minerva, era vergine e non era generato. E dopo simile confusione ed ignoranza anche del Vangelo, il Saint-Martin non si perita dal correggere i supposti spropositi dei pitagorici!

Il numero cinque o pentalfa è il simbolo dell'armonia, e quindi anche il simbolo della fratellanza pitagorica come la stella fiammeggiante è il simbolo della fratellanza massonica cementata dal *brotherly love*. I pitagorici scrivevano in corrispondenza dei vertici del pentalfa le lettere componenti la parola ὑγίεια, ossia salute, perché l'armonia di tutti gli elementi e di tutte le funzioni del corpo si manifesta come salute e l'armonia di tutti gli elementi spirituali rende possibile la salute o salvezza, intesa sia nel senso escatologico dell'orfismo sia nel senso pitagorico della palingenesi. Il numero sette è il simbolo della sapienza.

Il confronto tra i numeri sacri dei pitagorici ed i numeri sacri della massoneria non si può fare grado per grado perché la separazione del rituale massonico nei due gradi distinti di apprendista e di compagno è relativamente recente ed il grado di maestro col relativo rituale e catechismo ha poco più di due secoli. Ad ogni modo sembra che i cambiamenti siano consistiti in una semplice distribuzione ed in qualche innovazione, ma che si sia sempre avuto cura di conservare il patrimonio simbolico e ritualistico dell'ordine. Del resto anche la distinzione dei tre gradi rientra nello spirito del simbolismo tradizionale e si connette al primo dei numeri sacri. Si può dire grosso modo che il tre è il numero dell'apprendista o novizio, il cinque è il numero del compagno ed il sette è il numero del maestro o maestro venerabile o capo mastro.

Però occorre accettare con un certo discernimento le varianti, le aggiunte e specialmente le spiegazioni ed i commenti dei rituali e dei catechismi relativamente moderni, in cui si sono infiltrati elementi che non sono tradizionali e che invece sono spesso arbitrari e personali. Per esempio l'orientalista Goblet d'Alviella, che fu Sovrano Gran Commendatore del Supremo Consiglio del Rito Scozzese antico ed accettato del Belgio, ha indianizzato i rituali degli alti gradi: e, siccome ignorava completamente l'ermetismo, ha aggiunto anche errori veri e propri alla sua interpretazione orientalista. Il Ragon, uno scrittore del secolo scorso, noto una volta come *l'auteur sacré* della Massoneria, ha fatto del suo meglio nella interpretazione e nel commento dei rituali, ma li ha infarciti di definizioni e considerazioni moralistiche che non hanno molto a spartire con l'esoterismo massonico e che fanno oramai di stantio: Ottimi sono i tre libri del Wirth nonostante la propensione personale che egli manifesta per le interpretazioni ermetiche e per la scuola francese di occultismo di E. Levi, del Guaita, del Papus, a base di cabala ebraica e di tarocchi. La meglio è di attenersi ai vecchi rituali semplici, scarni, scheletrici. Ve ne sono inglesi anteriori al 1730, francesi anteriori al 1750 ed italiani anteriori al 1780 ⁽⁵⁸⁾, non derivati dalla massoneria francese.

⁽⁵⁷⁾ LOUIS-CLAUDE DE SAINT-MARTIN, *Des Nombres*, Paris, 1801, pag. 48.

⁽⁵⁸⁾ Cfr. PERICLE MARUZZI, *Opere per una biblioteca massonica*, Roma, 1921.

Le due parole *loggia* e *massone* non sono in italiano parole importate dall'inglese o dal francese. Esse erano in uso in Italia sino dal trecento; si chiamavano loggie quelle dei fratelli comacini, e Firenze è piena di antiche loggie come quella dei Lanzi; la presunta derivazione della: parola loggia dalla parola *logos* che in greco significa verbo o parola è priva di fondamento e serve solo a giustificare la venerazione per il versetto di San Giovanni: *in principio erat Verbum*. In architettura, loggia è termine tecnico che designa un edificio aperto, retto da colonne o pilastri, costruito spesso nella parte alta degli edifici, per esempio il loggione del teatro, e quindi è termine appropriato per designare il tempio, massonico, sorretto da dodici colonne, che ha per volta il cielo.

Nella Loggia vi sono tre lumi sublimi ossia il Sole, la Luna ed il Delta luminoso; tre luci ossia il Maestro Venerabile ed i due Sorveglianti; tre pilastri, tre finestre, tre gioielli mobili ossia la squadra, la livella, e la perpendicolare; tre gioielli immobili ossia la pietra grezza; la pietra cubica a punta e la tavola da tracciare o tavola da disegno o tavola tripartita; e tre ornamenti ossia il pavimento a mosaico, la stella fiammeggiante ed il nastro ondeggiante. Triplice è il viaggio simbolico del profano per essere ammesso a ricevere la luce, triplice la batteria, il bacio, il toccamento nella tegolatura, triplice l'enigma proposto al profano, e tre i passi dell'apprendista. .

Compito dell'apprendista o novizio è quello di digrossare, sgrossare, dirozzare, la pietra grezza; compito del compagno libero muratore è quello di giungere a vedere e comprendere la stella fiammeggiante. Per scoprirla egli deve ascendere cinque gradini; egli ha il compito di formare la pietra cubica e di squadrarla in modo che sia atta alla costruzione del tempio. Egli si distingue per la sua conoscenza della stella fiammeggiante, e, siccome in rituali posteriori al 1737 compare la lettera G nell'interno del pentagramma, si dice anche che compito del compagno è di conoscere la lettera G ed il suo significato. Tutti i rituali, diciamo tutti, hanno cura di ricordare che la lettera G è l'iniziale di Geometria e quelli scozzesi osservano che essa è l'iniziale di God; altri rituali e catechismi che essa è l'iniziale di gnosi, generazione ecc. La sola spiegazione coerente è la prima; ed i cinque gradini che il compagno deve ascendere corrispondono al fatto che la geometria è la quinta delle scienze pitagoriche, e nella nostra interpretazione al fatto che per pervenire all'armonia simboleggiata dalla stella fiammeggiante occorre estendere il tetracordo o tetractis simboleggiata dal Delta con la legge di quinta.

Nella Loggia e nel quadro di Loggia di compagno, la stella fiammeggiante sostituisce il Delta tra il Sole e la Luna; vi sono cinque lumi invece di tre: la tegolatura, la batteria, l'età ed i passi si basano sul cinque invece che sul tre.

I gradini da salire per ascendere all'Oriente sono per, altro sette e sette sono i gradini da ascendere nella Camera di Mezzo. Il loro numero è quello delle sette scienze liberali; l'apprendista è tenuto a conoscere le prime tre, quelle del trivio, scienze puramente umane; il compagno deve conoscere in più l'aritmetica e la geometria; il maestro muratore deve manifestamente conoscere anche le ultime due, la musica e la sferica, ossia l'armonia delle sette note e l'armonia delle sfere.

Sette infine sono i nodi del nastro ondeggiante che avvolge le colonne del tempio.

CAPITOLO V

Il numero e le sue potenze

*I pitagorici assegnano al sommo Dio
il perfetto numero ternario in cui è inizio, mezzo, fine.
SERVIO, Comm. a Virgilio – Egloga VIII, 75.*

Quanto abbiamo esposto sin ora si riconnette indubbiamente alla scuola pitagorica e soltanto alla scuola pitagorica. Ma vi sono anche altri elementi più arcaici, che i pitagorici hanno trovato, accettato, assimilato ed anche esaltato, sebbene siano indipendenti dallo sviluppo dell'aritmetica pitagorica che si impernia sulla considerazione delle tetractis. Questi elementi si riferiscono al tre, ai suoi multipli, alle sue potenze ed ai numeri immediatamente consecutivi.

Abbiamo già detto che la numerazione parlata greca era una numerazione decimale, come la nostra, in cui il dieci e le potenze del dieci rappresentano delle unità di ordine superiore. Però la numerazione parlata greca, e così pure quella sanscrita e quella latina, per limitarsi a queste, mostra le tracce di una numerazione parlata a base tre che ha impresso un potente suggello nella mentalità stessa del popolo ed ha giustificato, se non addirittura determinato, la predilezione pitagorica per il numero tre. L'eco di questa predilezione è giunto sino a noi; il tre è universalmente considerato come il numero perfetto per eccellenza: le massime popolari: *omne trinum est perfectum*, non c'è due senza tre, si ispirano a questo concetto. «Nella scuola pitagorica e neopitagorica, scrive il Loria⁽⁵⁹⁾, vigeva la massima generale che ogni collezione di cose doveva ammettere una divisione in tre categorie»; Aristotile riporta la sentenza pitagorica che tutto si conclude col numero ternario il quale è inerente a tutte le cose, e che il tre si trova frequentemente *inter sacra*; ed il cardinale Borromeo in una sua opera rarissima e poco conosciuta⁽⁶⁰⁾ riporta questa osservazione di Aristotile. Quanto a Platone, egli comincia il Timeo, il suo dialogo pitagorico per eccellenza, con le parole: «uno, due, tre». Il tre, scrive il neo-pitagorico Teone da Smirne⁽⁶¹⁾ nella sua «esposizione delle cose matematiche utili alla lettura di Platone», è il primo (numero) che ha principio, mezzo, fine; e Lido⁽⁶²⁾ scrive presso a poco la stessa cosa. Ed il pitagorico alessandrino Porfirio⁽⁶³⁾ dice che «esiste in natura qualcosa che ha principio, mezzo, fine, ed a indicare tale forma e natura i pitagorici destinarono il numero tre».

⁽⁵⁹⁾ GINO LORIA, *Le scienze esatte*, 2^a ed., Milano, 1914, pag. 821.

⁽⁶⁰⁾ FEDERICI CARDINALIS BORROMAEI ARCHIEPIS. MEDIOLANI, *De Pythagoricis Numeris*, Libri tres, Mediolani 1627. Vedi lib. II. cap. XXVI, pag. 116.

⁽⁶¹⁾ THEONIS SMYRNAEI PLATONICI, *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*, ed. Hiller, Lipsia, 1878, pag. 4 e pag. 100.

⁽⁶²⁾ LIDUS, *De mensibus*; ed. Lipsia, 1898; IV, 64.

⁽⁶³⁾ PORFIRIO, *Vita Pythagorae*, 51.

Il numero tre è il *termine* di questa terna o triade e la nomenclatura indo-europea dei numeri mostra che nel contare esso era arcaicamente l'ultimo numero, e dopo di esso si ricominciava da capo. Infatti il latino *quator* o *quater* significa etimologicamente *et tres* perché il *qua* è l'enclitica latina; il sanscrito *catur* ha esattamente la stessa formazione. In greco una delle enclitiche è *τε* che compare nell'eolico *τέτορες* e nel dorico *τέττορες* e questa struttura si ritrova anche in italiano nelle parole *caterva*, *quaterna*, e *quaderna*. Una riprova di questa connessione tra il tre ed il quattro è fornita dalla frequenza in greco dell'espressione *τρίς και τετραχίς* ed in latino della corrispondente espressione *terque quaterque*, per esempio nel passo virgiliano «*O terque quaterque beati*»⁽⁶⁴⁾, che secondo Macrobio è imitato da un passo di Omero in cui l'autore dei *Theologumena arithmetica*⁽⁶⁵⁾ trova un senso mistico. Anche Dante continua la consuetudine dicendo⁽⁶⁶⁾: «Furo iterate tre e quattro volte»; e questa arcaica associazione del tre e del quattro concorda con quella pitagorica della tetractis che ha per raffigurazione il triangolo equilatero ossia la lettera delta che è la quarta dell'alfabeto. Il tre è in certo modo l'ultimo numero, e quindi il numero perfetto per eccellenza: ed allora nel sistema di numerazione parlata a base ternaria il quattro è una nuova unità, come il dieci lo è nel sistema decimale; ed i due numeri quattro e dieci, di cui abbiamo veduto la connessione nella tetractis, si trovano associati anche per il fatto di costituire la nuova unità rispettivamente nei due sistemi di numerazione.

Anche la grammatica contribuisce a dare al tre una speciale importanza perché sono numerose le distinzioni grammaticali ternarie sebbene alcune di esse possano essere opera intenzionale dei grammatici e quindi più conseguenza che causa della eccellenza del numero tre. Comunque la lingua precede la grammatica e la distinzione dei tre numeri grammaticali, dei tre generi e delle tre persone, non è una distinzione artificiale voluta dai grammatici. Osserviamo anche che il tre serve in greco alla formazione del superlativo: *τρισμακάρες* significa *beatissimi*, e *τρισμαέγιστος* che significa *grandissimo* è formato come il francese *très grand*.

Naturalmente la terna delle terne, ossia il numero nove, prodotto di tre via tre, è per questa ragione, come osserva Dante, un numero perfettissimo: e non stupisce che il tre ed il nove abbiano una grande importanza nel culto e nella magia. Secondo il Gomperz⁽⁶⁷⁾ la santità del numero tre si incontra già in Omero tutte le volte che si riunisce in una medesima invocazione una trinità di Dei, per esempio Zeus, Athena ed Apollo. Il culto degli antenati onora specialmente sotto il nome di *tritopatori* o trinità dei padri il padre, il nonno ed il bisnonno. «Il nove, scrive il Rohde⁽⁶⁸⁾, come è facile osservare, è specialmente in Omero una cifra tonda; era cioè molto comune e normale nell'antichità una divisione di periodi di tempo secondo gruppi di nove». Il pitagorico Anatolio⁽⁶⁹⁾ cita il verso di Omero (*Il. V*, 160) per provare che Omero riconosceva un valore speciale al numero nove. E lo pseudo Plutarco osserva che Omero sembra mostrare una predilezione speciale per il numero tre⁽⁷⁰⁾ e riconoscere uno speciale valore al numero nove, e rileva il fatto a proposito del verso *Il. XV*, 169, verso che per la stessa ragione è rilevato anche da Lido⁽⁷¹⁾ e dall'anonimo

⁽⁶⁴⁾ Verg., *Aen.* I, 94.

⁽⁶⁵⁾ Cfr. DELATTE, *Etudes ...*, 112. Altri passi contenenti la stessa associazione *terque quaterque* sono: VERG., *Aen.*, IV, 589; XII, 155; *G. I.* 411; *G. n.* 399; ORAZIO *Car.* XXXI, 23; TIBULLO, 3, 3, 26;

⁽⁶⁶⁾ DANTE, *Purg.* VII, 2.

⁽⁶⁷⁾ GOMPERZ, *Les penseurs de la Grèce*, I, 116.

⁽⁶⁸⁾ ERWIN ROHDE, *Psiche*, versione italiana, Bari, 1914; I, 255, nota. 11.

⁽⁶⁹⁾ ANATOLIO, *περί δέκαδος*, 9; DELATTE, *Etudes ...*, 122, nota 1.

⁽⁷⁰⁾ Ps. PLUTARCO, *Vita Homeri*, 145.

⁽⁷¹⁾ Cfr. DELATTE, *Etudes ...*, 120 e 122.

autore dei *Theologumena arithmetica*. Porfirio ⁽⁷²⁾, raccontando la visita di Pitagora a Creta, dice che Pitagora «ascese pure all'antro che si dice ideo velato di negra lana, e qui vi secondo il rito passò i tre volte nove giorni e vide il trono che annualmente si allestisce a quel Dio». Vediamo così comparire anche il ventisette, la terza potenza del tre; e Porfirio, che sapeva bene naturalmente che tre per nove è eguale a ventisette, insiste sul carattere rituale e sacro di cotesto periodo di tempo, doppiamente sacro perché composto di tre enneadi.

Lo Zeller ⁽⁷³⁾ si sofferma lungamente sopra il continuo ricorrere del numero tre nelle cerimonie fUlliebri greche; ed Adolf Kaegi ⁽⁷⁴⁾ disserta lungamente sul tre e sul nove nelle cerimonie mortuarie in India, nell'Iran, in Grecia, in Roma. Molte di queste usanze sono giunte sino a noi passando dal paganesimo al cristianesimo, e la liturgia cattolica ne offre un esempio nel *triduo*, nella *novena* e nelle cerimonie per il *trigesimo* della morte. Il calendario romano ha come giorno di riferimento le *nonae*, ossia il nono giorno prima degli Idi. Nel medio evo vigevano ancora le ore temporali, e Dante ne parla nella *Vita Nova* e le ricorda ⁽⁷⁵⁾ nei versi: «Fiorenza dentro della cerchia antica - onde ella toglie ancora e terza e nona». La nona era il mezzogiorno; ed è una voce che vive ancora nell'inglese *noon* ed in taluni dialetti italiani, per esempio il Barbarani ne fa uso nelle sue poesie in vernacolo veronese.

Questa venerazione per il numero tre e per il numero nove, così profondamente radicata nella lingua, negli usi, e nella mentalità greca, ha contribuito alla consuetudine pitagorica di distinguere una tema in ogni collezione di cose; tanto più che Cotrone, sede della scuola pitagorica fondata da Pitagora, era una colonia dorica, e la più antica delle istituzioni comuni ai Dorii è la divisione in tre tribù ⁽⁷⁶⁾. I vascelli dei Dorii si contavano per multipli di tre ed i Dorii venivano qualificati τριχάρεις cioè appunto a tre tribù; la qualifica era antica perché anche Omero parla ⁽⁷⁷⁾ dei triplici Dorii.

Certo questa venerazione del numero tre non è una peculiarità del pitagoreismo; la tradizione estremo orientale per esempio la espone nel Tao-te-king con la formola: Uno ha prodotto due, due ha prodotto tre, tre ha prodotto tutti i numeri; e Fabre d'Olivet ⁽⁷⁸⁾ osserva che questa dottrina si trova esposta elegantemente nei così detti Oracoli di Zoroastro: Il ternario brilla dovunque nell'universo e la monade è il suo principio. Ma questa venerazione è accentuata nel pitagoreismo in corrispondenza al suo carattere aritmetico; «i pitagorici, scrive Servio ⁽⁷⁹⁾, assegnano al sommo dio il perfetto numero ternario in cui è inizio, mezzo, fine». Per il Bungo ⁽⁸⁰⁾ il ternario è quasi un ritorno all'uno ed al principio. Osserva il Bungo ⁽⁸¹⁾ che gli antichi teologi veneravano precipuamente tre Dei, Giove, Nettuno e Plutone, figli di Saturno e di Rea. Dopo l'unità Saturnia, dice il Bungo, cioè l'unione del mondo intelligibile cui sono implicite tutte le cose, essi divisero il mondo sensibile in tre regioni; celeste retta da Giove, media da Nettuno, sotterranea da Plutone; si hanno dunque tre fratelli, tre regni, tre scettri e tutti e tre tripartiti. Si hanno poi le tre furie: Aletto, Tesifone, Megera; le tre Arpie: Aello, Ocypeta, Celano; le tre Parche: Cloto, Lachesis, Atropo. Il

⁽⁷²⁾ PORFIRIO, *Vita di Pitagora*, ed. Carabba, Lanciano, 1913, pag. 57.

⁽⁷³⁾ EDUARD ZELLER, *Sibyllinische Blätter*, Berlin, 1890, pag. 40 e seg.

⁽⁷⁴⁾ ADOLF KAEGI, *Die Neunzahl hei den Ostarien*. Separatdruck aus den philologischen Abhandlungen.

⁽⁷⁵⁾ DANTE, *Par.* XV, 97-98.

⁽⁷⁶⁾ Cfr. A. MEILLET, *Aperçu d'une histoire de la langue grecque*, Paris, 1913, pag. 98.

⁽⁷⁷⁾ HOM., *Odissea*, XIX, 175.

⁽⁷⁸⁾ FABRE D'OLIVET, *Les vers dorés de Pythagore expliqués*, Paris, 1813, 24.

⁽⁷⁹⁾ SERVIO, *Comm. a Vergil.* - *Egloga VIII*, 75.

⁽⁸⁰⁾ BUNGI, *Numer. Mysteria*, 1591, 2^a ed., pag. 96.

⁽⁸¹⁾ BUNGI, *Numer. Mysteria*, 18.5.

Pareto ⁽⁸²⁾ riconosce l'applicazione di questa tradizione nella triade capitolina e nel triplice segno con cui quasi ogni divinità ostenta la propria potenza, il triplice fulmine di Giove, il tridente di Nettuno, il tricipete cane di Plutone. Il cristianesimo ha la santissima trinità, i tre re Magi, la loro triplice offerta, le tre croci del Golgota. Ma nel pitagoreismo questa venerazione del tre assume una importanza tutta speciale, perché la caratteristica del pitagoreismo sta appunto nella funzione fondamentale riconosciuta al numero. Quanto alla Massoneria abbiamo già veduto quale importanza abbia il numero tre tra i numeri sacri della Massoneria.

Una distinzione in tre categorie, che risale a Pitagora stesso è quella delle tre vite ⁽⁸³⁾ di cui fa uso Aristotile nell'Etica, e cioè della vita teoretica, della pratica e dell'apolaustica. Heraclide, di poco posteriore a Platone, dice che Pitagora fu il primo a fare questa distinzione; come coloro che convenivano ai giuochi olimpici si potevano suddividere in tre classi: quelli che andavano per comprare e per vendere, quelli che andavano per partecipare alle gare e quelli che andavano semplicemente per osservare, così in tre classi corrispondenti potevano dividersi gli uomini. Il Rey, che di solito è propenso ad attribuire ai pitagorici posteriori quello che gli antichi attribuivano a Pitagora in persona, parlando di questa distinzione, riconosce «come sia impossibile dubitare che essa rimonta in sostanza agli inizi stessi della scuola».

Un'altra importante distinzione in tre categorie la troviamo nei *Detti aurei*. I primi tre versi contengono il precetto di una triplice venerazione: prima per gli Dei immortali, poi per l'Orco ed in fine per gli eroi indiat ⁽⁸⁴⁾. Siccome questo precetto si trova anche in Giamblico ed in un estratto di Timeo di Tauromenia, il Delatte ritiene si tratti di un antico elemento utilizzato dal tardo compilatore dei *Detti aurei*. Così pure il precetto dei *Detti aurei* di prendere in esame tre volte prima di addormentarsi ogni atto della giornata appare già in Porfirio ed è quindi secondo il Delatte un antico precetto pitagorico. Il tre ricompare una terza volta, come era prevedibile, nei *Detti aurei* e precisamente nell'ultimo verso. Così esso compare pitagoricamente tre volte in principio, nel mezzo ed alla fine di questo scritto pitagorico.

Gli ultimi due versi dei versi aurei sono:

ἦν δ'ἀπολείψαι σῶμα ἐς αἰθέρ' ἐλεύθερον ἔλθης
ἔσσεαι ἀθάνατος θεὸς ἄμβροτος, οὐκετι θνητός.

ossia letteralmente: Se lasciato il corpo perverrai al libero etere sarai imperituro, dio immortale, non uccidibile. Come si vede, si insiste sul numero tre. Riportiamo questi due versi nel testo per due ragioni: per la loro importanza trattandosi della palingenesi pitagorica, o grande opera, e per il fatto che in generale essi sono stati mal tradotti, non bastando la conoscenza della lingua greca per comprendere il senso preciso di espressioni tecniche ed ambigue del pitagoreismo.

Sono errate le traduzioni del Fabre d'Olivet, quella dello Chaignet riportata dal Kremmerz, e perfino quella del Delatte. Il Delatte, per negligenza, traduce: «Se tu pervieni, *dopo la morte*, alle altezze del libero etere». Ora il tradurre ἀπολείψαι σῶμα con *dopo la morte* equivale a restringere in modo affatto arbitrario il significato delle parole perché queste due parole significano letteralmente: avendo abbandonato il corpo, senza specificare quando, come e perché, e se mai con un senso di attività, cioè avendo posto da banda il corpo, avendo conquistato e non subito il suo abbandono. E poiché sappiamo che lo scopo primario che il discepolo pitagorico si proponeva di

⁽⁸²⁾ V. PARETO, *Trattato di Sociologia generale*, I, 499.

⁽⁸³⁾ Cfr. ABEL REY, *La jeunesse de la science grecque*, 119.

⁽⁸⁴⁾ La parola «Orco» è di solito tradotta con giuramento. Essa per altro è anche sinonimo di Ade; ed in questo modo la triade da onorare è una triade omogeneo, composta degli Dei superiori, degli eroi o semidei e degli Dei inferiori.

raggiungere con ogni sforzo era la liberazione dai vincoli del corpo, e non già l'attesa passiva ed inerte della morte o della grazia, è chiaro che nel tradurre bisogna almeno lasciare alle due parole il senso lato che esse hanno nell'originale sebbene da tutto il contesto risulta evidente che esse alludono a quell'abbandono del corpo che si ottiene mediante il «distacco volontario rituale» e non a quel distacco che la morte adduce a tutti gli uomini ed a tutti gli animali, senza bisogno di aiuti, anzi malgrado ogni sforzo in senso contrario. Il famoso pitagorico francese Fabre d'Olivet traduce anche lui in modo arbitrario: *en laissant sur le corps regner l'intelligence* ⁽⁸⁵⁾, ed un autore italiano recente fedelmente lo segue.

Un'altra importante distinzione in tre categorie è la seguente: «I pitagorici, scrive il Delatte ⁽⁸⁶⁾, dividono gli esseri ragionevoli in tre categorie: l'uomo, le divinità ed un essere di una essenza intermedia come era Pitagora». Pure in tre classi erano suddivisi i membri del sodalizio pitagorico; le quali secondo Giamblico erano quelle dei novizii, dei matematici e dei fisici. Altre denominazioni vengono date da altri scrittori ma la divisione è sempre triplice.

In geometria i pitagorici distinguevano tre specie di angoli: acuti, retti ed ottusi che ascrissero a tre specie di divinità ⁽⁸⁷⁾, e tre specie di triangoli ⁽⁸⁸⁾: equilatero, isoscele e scaleno. Essi sapevano che il riempimento del piano con poligoni regolari è possibile solo con tre specie di poligoni: il triangolo, il quadrato e l'esagono; e sapevano che tre sono i poligoni regolari che costituiscono le facce dei cinque poliedri regolari o figure cosmiche. E sebbene nessun testo di geometria pitagorica ci sia pervenuto, è sintomatico che gli Elementi di Euclide abbiano inizio *ex abrupto* con la considerazione del triangolo equilatero; si può sospettare che ciò avvenisse tradizionalmente anche prima nella geometria dei pitagorici. Ed in musica abbiamo veduto l'importanza delle tre progressioni menzionate da Archita, la progressione aritmetica, geometrica ed armonica con le loro tre medie; e come l'intera ottava od armonia sia una estensione del tetracordo di Filolao, che è costituito dalle tre corde *do, fa, sol* e dalla armonica della prima.

In aritmetica abbiamo già veduto che i pitagorici hanno suddiviso i numeri in numeri ellittici, perfetti ed iperbolici. Così pure i numeri rettangolari od epipedi venivano distinti in quadrati, eteromechi e promechi, E così pure i pitagorici distinguevano tre classi di numeri pari e tre classi di numeri dispari.

Nicomaco ⁽⁸⁹⁾ distingue tra i numeri pari: 1° - i numeri parimente pari, ossia le potenze del due; 2° - i numeri parimente dispari ossia i numeri della forma $2(2m + 1)$; 3° - i numeri imparimente pari ossia i numeri della forma $2^n(2m + 1)$ con $n \geq 2$.

Le tre categorie sono composte dei numeri:

numeri parimente pari	:	4,	8,	16,	32 ...
numeri parimente dispari	:	6,	10,	14,	18 ...
numeri imparimente pari	:	12,	20,	24,	28 ...

La classificazione esaurisce tutte le possibilità, ed i numeri pari della terza classe sono quelli che non appartengono alle altre due. La classificazione dei numeri pari somiglia a quella dei numeri rettangolari, perché come gli eteromechi si distinguono dai promechi perché la differenza

⁽⁸⁵⁾ FABRE D'OLIVET, *Les vers dorés*, pag. 402; e cfr. ALESSIO LUIGI, *Pitagora*, Milano, 1940.

Il Siouville (A. SIOUVILLE, *Les Vers dorés de Pithagore*, 1913), traduce: *laissant ici bas le corps*, traduzione quasi corretta, riportata dal Wirth, *Le livre du Maître*, 103.

⁽⁸⁶⁾ DELATTE, *Etudes ...* 19 e cfr. GIAMBILICO, *Vita Pithagorae*, 114.

⁽⁸⁷⁾ Cfr. PROCLO, ap. TAYLOR, I, 148.

⁽⁸⁸⁾ Cfr. *Le Coniche* di APOLLONIO, ediz. Helberg, Lipsia, 1893, II, 170.

⁽⁸⁹⁾ NICOMACO, *Introduction to Arithmetic*, II, 8 pag. 294.

tra i lati nel caso dell'eteromeco è di un solo punto e di più punti nel caso dei promechi, così i numeri parimenti dispari contengono un solo fattore due, mentre gli imparimente pari contengono oltre al fattore dispari più volte il fattore due. Notiamo che Euclide nel Libro VII chiama parimente pari il prodotto di due fattori pari: ma questo non è conforme alla tradizione pitagorica e Giamblico biasima Euclide per questa definizione: e secondo quanto riferisce il Taylor ⁽⁹⁰⁾ Asclepio nel suo commento manoscritto al primo Libro di Nicomaco dice scorretta questa definizione di Euclide perché con essa si ottengono numeri pari e non numeri parimente pari.

A questa classificazione ternaria dei numeri pari ne corrispondeva una pure ternaria per i numeri dispari secondo la testimonianza di Nicomaco, di Giamblico e di Teone; ma essa ci è stata trasmessa in modo difettoso. Nicomaco distingue: 1° - i numeri primi dispari; 2° - i numeri secondarii e sintetici come il 9, 15, 21, 25, 27, 33... che sono prodotti di due o più fattori primi anche non distinti; 3° - i numeri che sono secondarii e composti in sé stessi ma primi rispetto ad un altro numero come il 25 ed il 9. E' manifesto che la seconda classe contiene tutti i numeri che non appartengono alla prima, e nell'esempio stesso riportato da Nicomaco tanto il 25 che il 9 appartengono alle due classi simultaneamente. Occorre dunque restituire la classificazione ternaria pitagorica dei numeri dispari; e ci sembra di poterlo fare nel seguente modo: Osservando che, nella classificazione ternaria pitagorica, tra l'unità ed il numero vi è solo il due; che analogamente nella classificazione dei numeri rettangolari tra il quadrato ed il promeco vi è solo l'eteromeco (che ha un *solo* punto in più in uno dei suoi lati): e che analogamente nel caso della classificazione ternaria dei numeri pari tra il numero parimente pari 2^n ed il numero imparimente pari $2^n (2m + 1)$ in cui con $n \geq 2$ vi è soltanto il parimente dispari $2 (2m + 1)$ in cui il fattore due è unico, la classificazione ternaria dei numeri dispari doveva probabilmente essere la seguente: 1° numeri primi dispari; 2° potenze di fattori primi di cui almeno due distinti; 3° potenze di un unico primo dispari con esponente almeno eguale a due. Ossia: numeri primi dispari a ; potenze di un solo primo a^n con n almeno eguale a due; gli altri casi di numeri dispari in cui vi sono almeno due fattori primi distinti.

Questa classificazione pitagorica dei numeri in terne di numeri pari e terne di numeri dispari non va confusa con la classificazione moderna dei numeri pari e dispari in quattro classi a seconda che il resto della divisione di un numero per quattro è 0, 1, 2, 3; attenzione tanto più necessaria in quanto che la stessa terminologia designa con la stessa parola cose differenti nelle due classificazioni e per esempio i numeri parimente impari pitagorici hanno la forma $2 (2m + 1)$ mentre per i moderni hanno la forma $4M + 1$. ⁽⁹¹⁾

Questa classificazione in terne e questa consuetudine ternaria, d'accordo con la arcaica numerazione a base tre che fa del quattro una nuova unità, conduce ad una classificazione in terne di tutti i numeri naturali. E difatti si trova in Teone la seguente disposizione dei primi nove numeri:

1	4	7		α	δ	ζ
2	5	8	ossia	β	ϵ	η
3	6	9		γ	ς	θ

rappresentati nel testo di Teone dalle prime nove lettere dell'alfabeto greco, le quali al suo tempo servivano appunto come segni numerali dei primi nove numeri. In questa enneade o tema di terne i singoli numeri della prima riga, divisi per tre, danno per resto l'unità, quelli della seconda danno per resto due è quelli della terza non danno resto. Si può osservare che in questa disposizione

⁽⁹⁰⁾ TAYLOR, *The Theoretic Arithmetic of the Pythagoreans*, Los Angeles, 1934, pag. 243.

⁽⁹¹⁾ Notiamo in fine come esempio dell'arcaicità dell'aggruppamento in terne che nella numerazione parlata greca vige come in quella italiana la legge di Handel, ossia le parole che esprimono i grandi numeri sono formate dividendo il numero in gruppi di tre unità, la classe delle unità, la classe delle migliaia, la classe dei milioni ecc.

l'unico numero interno è il cinque, cosa che accade sempre per il cinque, nella disposizione dei dieci numeri della decade secondo la tetractis.

Seguitando a disporre i numeri secondo terne si ottiene una terna di enneadi con 27 numeri rappresentati dalle 24 lettere dell'alfabeto greco e da tre episeimi o segni aggiunti nel sistema greco alfabetico di numerazione scritta. La seconda enneade comincia col 10 e la terza termina col 27, che è la terza potenza del tre ed è quindi un numero perfetto perché termina la terna di enneadi. Seguitando ancora si ottiene una enneade di enneadi il cui ultimo numero è 81. Se ci fermiamo a questa quaterna 3, 9, 27, 81 di potenze del tre essa è composta di numeri perfetti nel senso greco aristotelico della parola.

Abbiamo trovato il numero 27 in Porfirio che insiste nel dire che Pitagora passò tre volte nove giorni nel santuario di Giove in Creta; ed esso ricompare come oggetto di particolare attenzione da parte della Massoneria egiziana di Cagliostro. In una lettera, diretta a Cagliostro dal Venerabile della Loggia «Sagesse Triomphante»⁽⁹²⁾ per rendergli conto dei lavori di inaugurazione del tempio, si trova questo passaggio: «*L'adoration et les travaux ont durés trois jours et par un concours remarquable de circonstances nous étions réunis au nombre de 27, et il y a eu 54 heures d'adoration*».

Quanto al numero ottantuno lo vediamo comparire in Dante e questa volta senza il solito paravento delle gerarchie e dei principati. Secondo Dante la vita naturale di un uomo perfetto dovrebbe avere la durata di 81 anni, ed egli osserva⁽⁹³⁾ che «Platone vivette ottantuno anni secondo che testimonia Tullio in quello di Senettute»; ed aggiunge che se Cristo non fosse stato crucifisso sarebbe campato 81 anni. Come si vede Dante la sapeva lunga.

Dante ha diviso la sua Comedia in tre cantiche ciascuna di 33 canti scritti in terzine ciascuna di 33 sillabe. Egli espone nel *De vulgari eloquio* i motivi di ordine estetico per cui pregia l'endecasillabo ma potrebbe darsi che la scelta dell'endecasillabo fosse dovuta anche ad altre ragioni. Il 99, ultimo numero di due cifre, è un numero perfetto multiplo del tre e del nove; esso è il numero dei canti delle tre cantiche se non si assegna il primo ad una cantica particolare e cento è il numero totale dei canti. Ogni cantica ne contiene 33 come ogni terzina contiene 33 sillabe. Il 33 è prodotto di 3 per 11, il 99 è prodotto di 9 per 11; e se si fa la somma delle prime quattro potenze del tre e dell'unità si ottiene il quadrato di 11 che è il quarto numero primo dispari.

In questa numerazione a base tre, ossia in questa disposizione dei numeri in terne ed enneadi, le nuove unità sono i numeri congiuntivi alle potenze del tre, cioè il 4, 10, 28, 82. Del 4 e del 10 ci siamo già occupati. Quanto al numero 28 esso anzitutto è un numero perfetto nel senso modernamente tecnico e ristretto della parola perché i suoi divisori sono: 1, 2, 4, 7 e 14 la cui somma è appunto 28. Per queste ragioni era tenuto in particolare considerazione dai pitagorici e lo sappiamo in due modi.

L'*Antologia Palatina*⁽⁹⁴⁾ ha conservato sotto il nome dell'epigrammista Socrate un dialogo tra Policrate e Pitagora in cui Policrate domanda a Pitagora quanti atleti stia conducendo nella sua casa verso la saggezza. Pitagora risponde: Te lo dirò, Policrate: la metà studia l'ammirabile scienza delle matematiche, l'eterna natura è oggetto degli studii di un quarto, la settima parte si esercita alla meditazione ed al silenzio, vi sono in più tre donne di cui Teano è la più distinta. Ecco il numero dei miei allievi che sono ancora quelli delle Muse. La soluzione di questo problema e dell'equazione di primo grado corrispondente è proprio il numero 28; ed il modo come

⁽⁹²⁾ Cfr. MARC HAVEN, *Le maître inconnu*, 154.

⁽⁹³⁾ DANTE, *Conv.* IV, 24.

⁽⁹⁴⁾ *Anthol. Palatina*, XIV, 1.

il problema è impostato mostra come a Pitagora interessava proprio il rilevare che questo numero era un numero perfetto.

L'altra documentazione circa il numero 28 la dobbiamo alla Basilica pitagorica sotterranea di Porta Maggiore in Roma. Il Carcopino nel suo studio su questa basilica pitagorica mostra ⁽⁹⁵⁾ come anche i componenti la confraternita pitagorica cui apparteneva la basilica fossero in numero di 28, basandosi sulla osservazione già fatta dalla signora Strong ⁽⁹⁶⁾ che gli stucchi funerari della cella della basilica erano appunto 28. Senza la scoperta puramente fortuita di questa basilica pitagorica sotterranea non potremmo asserire con sicurezza che il 28 è un numero sacro nell'architettura sacra pitagorica. Né il Carcopino né l'epigrammista Socrate indicano la ragione della scelta del numero 28. Essa è manifestamente dovuta alla sua perfezione, e questa all'essere eguale alla somma dei propri divisori ed all'essere una nuova unità, nel sistema a terne ed enneadi.

Altre relazioni meno immediate intercedono tra i numeri della quaterna.: 4, 10, 28, 82. Il poligono di 28 lati ha 350 diagonali ossia il decuplo del numero delle diagonali del decagono che ne ha 35. Inoltre il 28° numero tetraedrico è il decuplo del 28° numero triangolare; ed il decimo numero triangolare che è 55 è ad un tempo media armonica e rapporto tra il decimo piramidale a base quadrata che è 1540 ed il quarto esagonale che è 28. Analogamente l'82 che segue il numero perfetto 81 come il 28 segue il 27, è tale che l'82° tetraedrico è eguale a 28 volte l'82° triangolare: si hanno dunque le due relazioni: $F(3, 28) = 10 P(3, 28) : F(3, 82) = 28 P(3, 82)$.

Queste sono una parte delle relazioni tra i numeri: 4, 10, 28, 81.

Tra i multipli del tre il sei è numero perfetto; ed il suo quadrato, il 36, è l'unico numero triangolare che sia quadrato di un altro triangolare. Infatti

$$\left\{ \frac{x(x+1)}{2} \right\}^2 = \frac{y^2(x^2+1)}{4} \quad \text{quando } x(x+1) = \frac{y^2(y+1)^2}{2};$$

e tenendo conto che i due fattori al primo membro sono due numeri primi tra loro e che lo stesso deve accadere al secondo membro, ed esaminando i quattro casi possibili a seconda che x ed y sono pari o dispari si trova facilmente che le sole soluzioni intere e positive sono $x = y = 1$ ed $x = 8, y = 3$. Il sei è anche il solo numero per il quale accade che il suo cubo è eguale alla somma dei cubi dei tre numeri consecutivi che lo precedono. Infatti indicando con $x - 1, x, x + 1$ ed $x + 2$ i quattro numeri consecutivi deve essere :

$$(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = (x+2)^3$$

ossia $x^3 - 3x^2 - 4 = 0$ ossia $(x-4)(x^2 + x + 1) = 0$ la quale non ammette altra soluzione reale che $x = 4$ e quindi si ha:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3.$$

Se consideriamo i triangoli rettangoli in numeri interi, l'unico i cui lati abbiano per misura tre numeri interi consecutivi è, come sappiamo, il triangolo egizio (3, 4, 5) la cui area ha per misura il 6; vi sono poi due classi di triangoli in numeri interi cui appartiene come primo triangolo il triangolo egizio, 1° - quelli nei quali l'ipotenusa supera di uno il cateto maggiore loro, 2° - quelli in

⁽⁹⁵⁾ JEROME CARCOPINO, *La basilique pythagoricienne de la Porte Majeure*, Paris, 1927, pag. 255.

⁽⁹⁶⁾ EUGENIE STRONG, *The stuccoes of the underground basilica near the Porta Maggiore* nel *Journal of Hellenic studies*, XLIV, 1924, pag. 65.

cui il cateto maggiore supera di uno quello minore. La prima di queste due classi è data dalla formola

$$\left\{ \frac{n^2 - 1}{2} \right\}^2 + n^2 = \left\{ \frac{n^2 + 1}{2} \right\}^2$$

la quale per ogni valore dispari di n fornisce un triangolo rettangolo in numeri interi ⁽⁹⁷⁾. Questa risoluzione è la stessa che al dire di Proclo era data da Pitagora. Il primo triangolo dato da questa formola si ha per $n = 3$ ed è il triangolo egizio; il secondo si ha per $n = 5$ ed è il triangolo (5, 12, 13) la cui area è 30; la somma delle aree dei due triangoli è 36. Il problema di determinare un triangolo rettangolo in cui la differenza dei cateti è eguale ad uno è un poco più difficile ed è stato risolto dal matematico Girard; il primo di questi triangoli è il triangolo egizio, il secondo è il triangolo (20, 21, 29) la cui area è 210; la somma delle due aree è $216 = 6^3$.

Osserviamo adesso che il 36 è l'ottavo numero triangolare e nel medesimo tempo il sesto quadrato ossia si ha:

$$P(3, 8) = P(4, 6) = 36$$

⁽⁹⁷⁾ Questa formola pitagorica è una conseguenza immediata della proprietà fondamentale che hanno i quadrati di crescere conservando la similitudine della forma. Quando lo gnomone è un quadrato i due quadrati consecutivi hanno per differenza un quadrato. Ora gli gnomoni quadratici non sono altro che i numeri dispari; se $l'np$ numero dispari è un quadrato, cioè se si ha $2n - 1 = m^2$ la somma dei primi numeri dispari che lo precedono è $(n - 1)^2$ e si ha:

$$(n - 1)^2 + m^2 = n^2. \text{ Ma } n = \frac{m^2 + 1}{2}$$

e sostituendo si ha

$$\left\{ \frac{m^2 - 1}{2} \right\}^2 + m^2 = \left\{ \frac{m^2 + 1}{2} \right\}^2$$

Siccome poi m è dispari cioè della forma $m = 2p + 1$ il cateto pari si può scrivere:

$$y = \frac{m^2 - 1}{2} = \frac{(2p + 1)^2 - 1}{2} = \frac{4p(p + 1)}{2}$$

che è il quadruplo del p° numero triangolare. Questa formola pitagorica esprime quindi il teorema: il quadruplo del p° numero triangolare ed il $(p + 1)^\circ$ numero dispari sono i due cateti di un triangolo rettangolo in numeri interi in cui l'ipotenusa supera di uno il cateto pari. Si ha cioè:

$$\left\{ \frac{p(p + 1)}{2} \right\}^2 + (2p + 1)^2 = \left\{ 4 \frac{p(p + 1)}{2} + 1 \right\}^2$$

per esempio per $p = 5$ si ha il triangolo (60, 11, 61).

Questa formola si deduce come caso particolare dalle formole generali di pag. 40 e 41 ponendo in esse $m = p + 1$ ed $n = p$; infatti la x diviene:

$$x = p^2 + 2p + 1 - p = 2p + 1 \text{ e la } y \text{ diviene: } y = 2p(p + 1)$$

ed osserviamo che i due numeri 3 ed 8 sono rispettivamente il numero dei lati della faccia dell'ottaedro ed il numero delle faccie, mentre i numeri 4 e 6 sono analogamente il numero dei lati della faccia del cubo od esaedro ed il numero delle faccie; e che queste due figure cosmiche ottaedro e cubo sono reciprocamente polari. Analogamente il ventesimo triangolare che è 210 è eguale al 12° pentagonale, si ha cioè:

$$P(3, 20) = P(5, 12) = 210$$

ed anche questa volta il numero 20 è il numero delle faccie triangolari dell'icosaedro ed il 12 il numero delle faccie pentagonali del poliedro polare cioè del dodecaedro. In fine per il tetraedro che è autopolare avviene che $P(3, 4) = 10$.

Dunque questi tre numeri 10, 36 e 210 si ottengono considerando le cinque figure cosmiche e precisamente le tre coppie di poliedri polari: il tetraedro autopolare, l'ottaedro ed il cubo, l'icosaedro ed il dodecaedro. Per le cinque figure cosmiche esistenti, che tanta parte hanno nella geometria e cosmologia pitagorica e platonica sussiste quindi la mirabile proprietà: i numeri triangolari che hanno per ordine il numero delle faccie di un poliedro a faccie triangolari sono eguali ai numeri poligonali che hanno per genere il numero dei lati 3, 4, 5 del poliedro polare e per ordine il numero delle faccie di questo poliedro. Ossia il numero poligonale che ha per genere il genere della faccia del poliedro e per ordine n numero delle faccie resta invariato passando da un poliedro al poliedro polare. .

Si vede poi subito che la somma di questi tre numeri 10, 36 e 210 è eguale a 256 ossia alla quarta potenza del 4

$$10 + 36 + 210 = 4^4 = 2^8$$

mentre il prodotto di questi tre numeri decomposto in fattori primi contiene i quattro fattori 7, 5, 3, 2 elevati rispettivamente alla prima, seconda, terza e quarta potenza. Le basi formano la quaterna del due e dei primi tre numeri primi dispari e gli esponenti sono i numeri delle tetractis.

I triangolari che hanno per ordine il numero delle faccie del tetraedro, ottaedro ed icosaedro sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} P(3, 4) &= 10 = 1 + 2 + 3 + 4 = \text{tetractis} \\ P(3, 8) &= P(4, 4) = 36 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 \cdot 2 \cdot 3)^2 = (1 + 2 + 3)^2 = \\ &= (1 + 2) + (3 + 4) + (5 + 6) + (7 + 8) = \text{tetractis di Plutarco}^{(98)}. \end{aligned}$$

⁽⁹⁸⁾ Le due identità

$$\begin{aligned} P(3, 8) &= P(4, 6) = 36 \\ P(3, 20) &= P(5, 12) = 210 \end{aligned}$$

dicono che l'8° triangolare è eguale al sesto quadrato e che il ventesimo triangolare è eguale al dodicesimo pentagonale Il problema di determinare un triangolare che sia anche un quadrato è stato risolto da Eulero; l'equazione indeterminata

$$\frac{x(x+1)}{2} = y \text{ ammette infinite soluzioni intere date dalla doppia serie}$$

x	1	8	49	288
y	1	6	35	204

per le quali valgono le formole ricorrenti

$$x_n = 6x_{n-1} - x_{n-2} + 2 \quad y_n = 6y_{n-1} - y_{n-2}$$

$P(3, 20) = P(5, 12) = 210 = 3 P(5, 7) = 2 \cdot 3 \cdot 7 =$ prodotto del 2 e dei tre numeri primi della decade.

Si ha inoltre:

$$10 + 36 + 210 = 4^4$$

$$10 \cdot 36 \cdot 210 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Non sappiamo se queste proprietà siano già state osservate da altri, *sive Deus, sive Dea*.

I numeri della tetractis compaiono in alcune formole che esprimono le figure cosmiche come somme di tetraedri, e compaiono anche in fisica atomica in connessione col numero degli elettroni che formano il rivestimento nucleare dell'atomo dei gas rari.

Abbiamo osservato che un numero piramidale si può sempre esprimere come somma dei numeri tetraedrici. Analogamente si può dimostrare che la stessa cosa si verifica per i numeri ottaedrici, cubici, icosaedrici e dodecaedrici; e precisamente che un poliedrico di ordine n è sempre eguale ad una combinazione addittiva dei tre tetraedrici consecutivi di ordine $n - 2$, $n - 1$ ed n , e sussistono le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \text{Ot}(n) &= F(3, n) + 2 F(3, n-1) + F(3, n-2) \\ n^3 &= F(3, n) + 4 F(3, n-1) + F(3, n-2) \\ \text{Ic}(n) &= F(3, n) + 8 F(3, n-1) + 6 F(3, n-2) \\ \text{Do}(n) &= F(3, n) + 16 F(3, n-1) + 10 F(3, n-2) \end{aligned}$$

formole che è facile verificare tenendo presente che i primi membri sono dati dalle seguenti formole generali dei numeri poliedrici:

$$\text{n}^\circ \text{ tetraedrico, } F(3, n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

n° cubico n^3

Analogamente Eulero (*Algebra*, ed. Lipsia, pag. 391) ha risolto il problema di determinare i triangolari che sono anche pentagonali ossia ha risolto l'equazione

$$\frac{x(x+1)}{2} = \frac{y(3y-1)}{2}$$

le cui infinite soluzioni sono date dalla doppia serie

$$\begin{array}{rcccccc} x & 1 & 20 & 285 & 3976 & 55385 \dots \\ y & 1 & 12 & 165 & 2296 & 31977 \dots \end{array}$$

per le quali valgono le formole ricorrenti

$$x_n = 14 x_{n-1} - x_{n-2} + 6 \quad y_n = 14 y_{n-1} - y_{n-2} - 2$$

I triangolari corrispondenti a valori dispari dell'ordine x sono anche numeri diagonali, hanno cioè la forma $z(2z-1)$ con $z = 1, 143, 27693 \dots$

La prima soluzione, dopo l'unità, dei due problemi è quella data dalle due identità, cioè quella connessa all'ottaedro ed al cubo, ed all'icosaedro e dodecaedro, ed esprime la proprietà che abbiamo enunciata relativa alle figure cosmiche.

$$\text{n}^\circ \text{ ottaedrico} \quad \frac{n(2n^2 + 1)}{3}$$

$$\text{n}^\circ \text{ icosaedrico} \quad \frac{n(5n^2 - 5n + 2)}{2}$$

$$\text{n}^\circ \text{ dodecaedrico} \quad \frac{n(9n^2 - 9n + 2)}{2}$$

Nelle quattro identità precedenti il coefficiente del termine medio cioè dell' $(n - 1)^\circ$ tetraedrico è rispettivamente 2, 4, 8, 16 ossia la potenza del due che ha per esponente i numeri 1, 2, 3, 4 della tetractis.

Questo accadrebbe secondo la costituzione platonica della materia. In fisica atomica invece compaiono i quadrati dei numeri della tetractis. Ed ecco come: Se si ordinano gli elementi chimici secondo le leggi di Moseley e di Mendelejeff secondo la somiglianza del loro comportamento chimico, la prima colonna viene occupata dai così detti gas rari ossia l'elio, il neon, l'argon, il cripton, lo xenon, l'emanazione del radio. E si trova che il numero degli elettroni che costituiscono il rivestimento del loro nucleo atomico, nell'ordine sopra scritto che è quello naturale a seconda del loro peso atomico e del numero atomico è rispettivamente:

$$2 \quad 10 \quad 18 \quad 36 \quad 54 \quad 86$$

Le corrispondenti differenze finite o gnomoni sono quindi rispettivamente ed ordinatamente

$$2 \quad 8 \quad 18 \quad 32 \text{ ossia} \\ 2 \cdot 1^2, \quad 2 \cdot 2^2, \quad 2 \cdot 3^2, \quad 2 \cdot 4^2$$

ossia il doppio dei quadrati dei numeri della tetractis.

Osserviamo che i primi quattro triangoli rettangoli dati dalla formula di Pitagora (v. pag. 67) sono: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), ed in essi la differenza, tra l'ipotenusa ed il cateto dispari ha proprio i valori 2, 8, 18, 32. Tali triangoli hanno infatti i lati

$$\left(\frac{n^2 - 1}{2}, n, \frac{n^2 + 1}{2} \right)$$

e la differenza tra l'ipotenusa ed il cateto dispari n è

$$\frac{n^2 + 1}{2} - n = \frac{1}{2} (n - 1)^2$$

CAPITOLO VI

La tavola tripartita

Ἄεισθω συνέτοισι* χειρας δ'ἐπίθεσθε βέβηλοι
versi attribuiti da STOBEO (Flor. XLI) a PITAGORA.

I tre gioielli immobili della Loggia sono la pietra grezza, la pietra, cubica e la tavola da tracciare, o tavola tripartita, rispettivamente corrispondenti al novizio, al compagno ed al maestro venerabile. Questa tavola da tracciare, o da disegnare, porta talvolta delle figure o disegni, tal'altra, e più spesso, porta gli alfabeti massonici in cifra, caratterizzati dal fatto che sono composti da caratteri a forma quadrata. Essa si ottiene tracciando una coppia di rette parallele e tagliandole con un'altra coppia di rette parallele tra loro e perpendicolari alla prima coppia, di modo che la tavola viene suddivisa in nove parti disposte in tre linee ed in tre colonne. Per questa ragione, manifestamente, è chiamata tavola tripartita, o, con antica denominazione *tiercel board*.

Si ottengono così nove caselle di forma quadrata il cui contorno è tracciato solo parzialmente ed è completo per la sola casella centrale. Esse designano le lettere dell'alfabeto; ed a seconda dei tempi e delle lingue presentano delle varianti. Nel XVIII secolo la forma più generalmente adottata fu quella riprodotta nella fig. 12. ⁽⁹⁹⁾

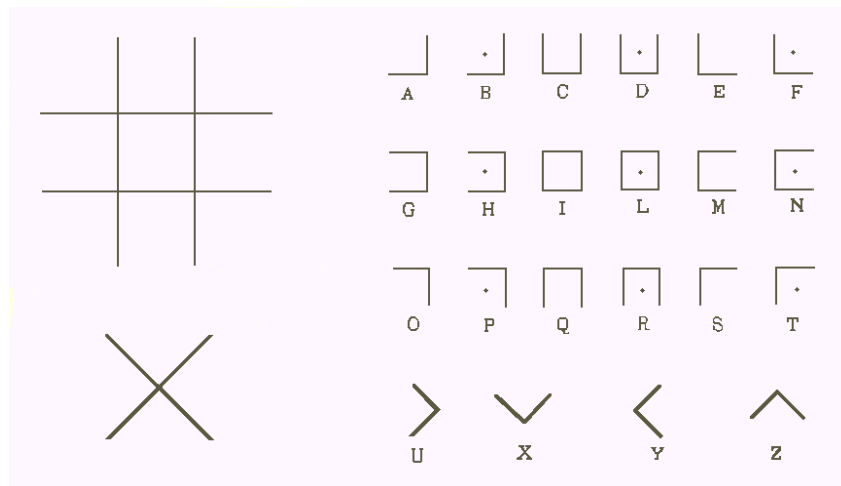


Fig.. 12

Come si vede manca il segno del K e del V. Il segno della L, iniziale di Loggia, è ancora oggi usato ad indicare appunto una Loggia. Inoltre si vede che la tavola, tripartita non è sufficiente da sola a rappresentare tutte le lettere dell'alfabeto ed occorre usare altri segni per la *u*, *x*, *y*, *z*.

⁽⁹⁹⁾ Cfr. O. WIRTH, *Le livre du compagnon*, 14.

Basterebbe questa constatazione per provocare il sospetto sopra il vero scopo della ripartizione della tavola da tracciare; la tripartizione doveva preesistere ed è stata alla meglio adattata per l'alfabeto massonico. Si tratta di indagare quale fosse l'antica funzione della tavola da tracciare e come la nuova si sia aggiunta alla antica e l'abbia sostituita.

Il Wirth osserva giustamente ⁽¹⁰⁰⁾ che essa si presta allo studio del triplo ternario, ossia dei numeri monadici dei pitagorici, che si possono fare corrispondere in vari modi alle nove caselle. In Teone da Smirne si trova la seguente disposizione:

1	4	7		α	δ	ζ
2	5	8	ossia	β	ϵ	η
3	6	9		γ	ς	θ

poiché Teone per indicare i numeri faceva uso delle lettere dell'alfabeto greco, invece delle così dette cifre arabe che noi usiamo da circa sei secoli. Il sistema alfabetico di numerazione scritta in uso al tempo di Teone era costituito da 27 segni cioè dalle 24 lettere dell'alfabeto greco attico cui si aggiungevano tre segni (detti episemi o segni aggiunti) che erano stati adoperati più anticamente nella scrittura, erano caduti in disuso per varie ragioni, ed erano precisamente i segni dello stigma che sostituisce l'antico digamma, del koppa e del sampi. Per conseguenza si possono formare con questi 27 segni tre tavole come quella di Teone; ma Teone dà soltanto la prima di queste tre tavole non perché si interessi in modo speciale alle prime nove lettere dell'alfabeto ma perché si interessa in modo speciale ai primi nove numeri della decade, potendosi sempre, come sappiamo, ridurre la considerazione degli altri numeri a quella dei primi nove, ed essendo questi i numeri che erano utili alla comprensione delle opere di Platone. Naturalmente la tavola di Teone si può anche scrivere scambiando le righe con le colonne ossia

1	2	3		α	β	γ
4	5	6	ossia	δ	ϵ	ς
7	8	9		ζ	η	θ

Questi numeri, e quindi anche le lettere corrispondenti dell'alfabeto greco, possono essere scritti in un modo qualunque, per esempio mediante le cifre arabe, o mediante l'antica numerazione scritta erodiana, o mediante i segni misteriosi di cui secondo Boezio facevano uso i pitagorici, od anche semplicemente mediante la raffigurazione della rispettiva casella. Ma anche adoperando le lettere dell'alfabeto greco occorre tenere presente che esse rappresentavano soltanto dei numeri

Così tracciata, la tavola di Teone coincide con la tavola tripartita dei liberi muratori; e, insieme alla pietra grezza ed alla pietra cubica si riferisce alla costruzione dei templi, che secondo il rituale è il compito della massoneria, essa ricorda che in questa costruzione occorre la conoscenza dei numeri sacri, ed inoltre per la sua forma indica che la divisione in terne è di speciale importanza. .

In particolare i numeri della seconda riga sono le medie aritmetiche dei numeri delle altre due righe appartenenti alla stessa colonna; così $4 = (1 + 7) : 2$, $5 = (2 + 8) : 2$, $6 = (3 + 9) : 2$; ed in modo consimile i numeri della seconda colonna sono le medie aritmetiche dei numeri delle altre due colonne appartenenti alla stessa riga, così $2 = (1 + 3) : 2$, $5 = (4 + 6) : 2$, $8 = (7 + 9) : 2$. Il cinque, che occupa la casella centrale, ha in più la proprietà di essere media aritmetica dei numeri estremi di ogni riga, colonna, o diagonale che passa per la casella centrale. Nella tavola tripartita di Teone il cinque, cioè il numero della stella fiammeggiante e del compagno libero muratore, eccelle per la posizione centrale e per la proprietà su indicata. La tavola tripartita dei nove numeri suggerisce al

⁽¹⁰⁰⁾ WIRTH, *Le livre du compagnon*, 141.

massone la contemplazione e lo studio dei numeri sacri; e, poiché essa è uno dei tre gioielli immobili, mostra che questo studio va associato al lavoro del digrossamento della pietra grezza e di squadratura della pietra cubica, od è intermedio tra la pietra grezza e la pietra cubica. Anche il simbolismo puramente numerico di questa tavola da tracciare è pitagorico ed universale e conforme all'universalismo della massoneria.

Quando e come da questa tavola puramente tripartita e numerica si è passati alla tavola tripartita che contiene i segni di un particolare alfabeto e di una lingua particolare? A questa domanda ci sembra di potere rispondere soddisfacentemente esaminando le successive derivazioni della tavola di Teone e della numerazione alfabetica greca.

Il sistema alfabetico di numerazione scritta è costituito dai seguenti ventisette segni:

A = α' = 1	B = β' = 2	Γ = γ' = 3
Δ = δ' = 4	E = ε' = 5	G = ζ' = 6
Z = ζ' = 7	H = η' = 8	Θ = θ' = 9
I = ι' = 10	K = κ' = 20	Λ = λ' = 30
M = μ' = 40	N = ν' = 50	Ξ = ξ' = 60
O = ο' = 70	Π = π' = 80	Ο = = 90
P = ρ' = 100	Σ = σ' = 200	T = τ' = 300
Υ = υ' = 400	Φ = φ' = 500	X = χ' = 600
Ψ = ψ' = 700	Ω = ω' = 800	= μ = 900

Fig. 13

L'apice posto in alto a destra delle lettere serviva per distinguere i numeri dalle parole. Il sesto segno, il 21° e l'ultimo sono rispettivamente i segni dei tre episemi stigma, koppa e sampi. Lo stigma equivale all'antico digamma F.

Sebbene l'ordine in cui si presentano i segni del sistema alfabetico di numerazione scritta coincida di massima con l'ordine delle ventidue lettere dell'alfabeto fenicio, da cui indubbiamente proviene l'alfabeto greco, l'idea di servirsi dei segni alfabetici per designare i numeri è greca e non fenicia (¹⁰¹); e gli ebrei formarono il loro sistema, di numerazione scritta mediante le lettere a simiglianza del sistema greco. Anche gli ebrei fecero all'uopo uso delle ventidue lettere dell'alfabeto ebraico cui aggiunsero le cinque lettere finali. Tanto nel sistema greco che in quello ebraico le prime nove lettere servono ad indicare i numeri monadici cioè dall'uno al nove, la seconda enneade serve ad indicare le decine D numeri decadici e l'ultima enneade ad indicare le centinaia o numeri ekatontadici.

In questi due sistemi le lettere rappresentano i numeri e viceversa i numeri corrispondono alle lettere. Ne derivano i metodi di onomanzia numerica ed i calcoli isopsefici tanto in greco che in ebraico: per esempio S. Ippolito della prima metà del III secolo calcola il numero della parola Ἀγαμέμνων facendo la somma dei numeri corrispondenti alle lettere e poi prendendo il resto della divisione per nove di questo numero, resto detto pitmene, ossia riducendo tale numero alla prima decina. Si ottiene in tal modo

$$1 + 3 + 1 + 4 + 5 + 4 + 5 + 8 + 5 = 36$$

il cui pitmene è nove, perché $3 + 6 = 9$.

Il passaggio da questa scrittura alfabetica dei numeri in greco ed in ebraico alla scrittura cifrata ed all'alfabeto massonico pare sia avvenuto per opera dei cabalisti ebrei. Enrico Cornelio Agrippa,

(¹⁰¹) Cfr. G. LORIA, *Le scienze esatte...*, 753.

parlando delle scritture sacre e segrete, scrive ⁽¹⁰²⁾: «Un'altra specie di scrittura, assai reputata al tempo dei cabalisti, è divenuta oggi di uso tanto comune da essere quasi caduta in mano dei profani». Essa è composta di tre gruppi di nove lettere ebraiche, in tutto le 27 lettere che formano il sistema di numerazione scritta alfabetica ebraica. Il primo gruppo è disposto nelle nove caselle ottenute come quelle della tavola tripartita, il secondo gruppo disponendo in simil modo le seguenti nove lettere ed il terzo facendo altrettanto con le ultime nove. La scrittura in cifra dei cabalisti, tanto reputata secondo Agrippa, consiste semplicemente nel sostituire ad ogni lettera la casella che la contiene. Occorre soltanto procedere da destra a sinistra come nella scrittura ebraica per ottenere le prime nove lettere; così □ indica la prima lettera od *aleph*, □□ la seconda o *beth*, □□□ indica la terza o *ghimel*, e così via mettendo un punto, due punti, o tre punti nell'interno della casella a seconda che si vuole indicare le lettere del primo, del secondo e del terzo gruppo. L'interesse della cosa per Agrippa non sta nella possibilità del segreto offerta da questa scrittura in cifra, quanto nelle corrispondenze che questa tavola stabilisce tra le tre enneadi di lettere, di numeri ed i tre mondi intellettuale, celeste ed elementare; ma le lamentele di Agrippa, per la eccessiva popolarità di questa reputata scrittura mostrano come essa si fosse già diffusa nel campo profano, che probabilmente non la adoperava per i calcoli e le combinazioni esoteriche della cabala ebraica. Un secolo dopo questa scrittura cifrata non è più riserbata alla lingua ebraica, ma ne troviamo una adattamento alla lingua latina ed alle lingue moderne con assegnazione arbitraria e variabile delle lettere dell'alfabeto alle varie caselle. Queste scritture in cifra si trovano esposte per esempio nelle opere di Giovanni Battista Della Porta e del cabalista Blaise de Vigenère ⁽¹⁰³⁾. Dal punto di vista enigmistico il valore di queste scritture in cifra è infantile; dal punto di vista divinatorio ed onomastico ogni calcolo basato sopra i valori numerici delle lettere non ha per sé stesso alcun valore, il che non impedì a protestanti e cattolici di servirsene come argomento nella loro polemica religiosa.

Finalmente l'alfabeto cifrato mediante le caselle della tavola tripartita compare in massoneria, e costituisce l'alfabeto massonico. Per esempio il *Thuilleur de l'Ecossisme* ⁽¹⁰⁴⁾ ed il *Manuale massonico* del Vuillaume ⁽¹⁰⁵⁾ riportano la figura della tavola da tracciare tripartita e contenente nelle caselle le lettere dell'alfabeto. Ma in più antiche pubblicazioni massoniche o sopra la massoneria la tavola da tracciare non è tripartita, non contiene la scrittura in cifra, e contiene invece dei disegni, conforme alla sua funzione di servire ai calcoli geometrici ed architettonici dei muratori. Così per esempio accade nell'opera: *L'ordre des Franc-Maçons trahi* ⁽¹⁰⁶⁾ che è del 1742, talché si potrebbe pensare che la Massoneria avesse adottato in blocco nel XVIII secolo tavola tripartita ed alfabeto massonico; e che precedentemente la tavola da tracciare non contenesse la tripartizione. Ma così non è sicuramente perché una pubblicazione inglese precedente, che è una delle più antiche che esistono sopra la massoneria e precisamente la *Masonry dissected* del Prichard che è del 1730 cioè pochi anni dopo la fondazione della Gran Loggia di Londra, menziona la tavola tripartita che denomina col termine antiquato inglese *tiercel board* e mostra come già da allora la tavola tripartita appartenesse col suo caratteristico nome al patrimonio simbolico e di mestiere della fratellanza.

⁽¹⁰²⁾ E. C. AGRIPPA, *La filosofia occulta e la Magia*. Vedi la pag. LXXI dello studio introduttivo di A. Reghini.

⁽¹⁰³⁾ GIOVANNI BATTISTA DELLA PORTA, *De furtivis literarum notis vulgo de ziferis*. Libri III Neapoli 1563 pag. 92-94. BLAISE DE VIGENERE, *Traité des chiffres ou secrètes manières d'ecrire*, Paris, 1567, pag. 275.

⁽¹⁰⁴⁾ *Thuilleur de l'Ecossisme*. Nouvelle édition; Paris, 1821; planche 3 et 4.

⁽¹⁰⁵⁾ VUILLAUME, *Manuel maçonnique par un vétéran de la Maçonnerie*; 1^a ed., 1820. Vedi Planche III della 2^a ed.

⁽¹⁰⁶⁾ *L'ordre des Francs-maçons trahi*, 1742, In questa prima edizione il nome dell'autore è scritto nell'alfabeto cifrato ed è l'abate Pérau; ma secondo quanto racconta Casanova è Giovanni Gualberto Bottarelli.

Sembra adunque molto probabile che la tavola tripartita della Massoneria fosse in antico tracciata sulla tavola da tracciare come indica il suo vecchio nome inglese e consistesse delle sole due coppie di rette tra loro perpendicolari. I vecchi massoni inglesi non sentivano certo il bisogno o l'opportunità di un alfabeto in cifra per corrispondere tra loro; mentre invece, trapiantandosi la Massoneria nel continente europeo e precisamente in Francia ed assumendo carattere sociale e politico, sembrò che il disporre di una scrittura segreta potesse essere di qualche utilità; e siccome le scritture cifrate di Porta e di Blaise de Vigenère si adattavano mirabilmente, per la comune origine dalla tavola di Teone, ad ospitare nelle loro caselle tali alfabeti, senza altro le lettere dell'alfabeto vennero inserite nelle caselle della tavola tripartita, senza per altro poter ovviare al fatto che le nove caselle si prestano bene per rappresentare le enneadi delle lettere che esprimono la numerazione greca ma non si prestano bene alla raffigurazione delle lettere dei nostri alfabeti il cui numero non è un multiplo del nove. Ma, anche se la storia dei successivi passaggi non è esattamente questa, ci sembra fuori dubbio che in un modo o nell'altro l'origine della tavola da tracciare risalga in definitiva alla tavola di Teone. Essa indica ai liberi muratori che le loro costruzioni debbono basarsi sopra le proprietà dei numeri o della geometria, e simbolicamente che i lavori massonici vanno eseguiti tenendo presenti le proprietà dei numeri sacri. Questo vale in particolare per la «grande opera».

Notiamo in fine che la tavola da tracciare dell'antica corporazione muratoria si può associare se non identificare in un modo molto semplice e naturale ma generico e di scarso significato con l'antico abbaco pitagorico, il δέλτος, o *mensa pythagorica*, più tardi confusa con l'antica tavola pitagorica che sino a pochi anni fa si insegnava ancora nelle scuole elementari. Un passo di Giamblico infatti presenta ⁽¹⁰⁷⁾ Pitagora nell'atto di iniziare un giovane ai misteri aritmetici mediante figure tracciate sopra un ἄββαξ, e fa in tal modo risalire a Pitagora l'uso dell'abbaco, ossia di una tavola ricoperta di polvere per eseguire i calcoli. L'abbaco era un arnese assai comune, ed i ragazzi romani andando a scuola portavano questa tavoletta ad armacollo legata ad una cassetta contenente i *calcoli* ⁽¹⁰⁸⁾ ossia le pietruzze per calcolare. Il *deltos* era così chiamato per l'antica sua forma simile al delta; ed era chiamato ἄββαξιόν, diminutivo di ἄββαξ tavola, serviva per scrivere conti e figure matematiche. La designazione latina, *mensa pythagorica*, che si trova in Boezio, ne specifica l'uso originale per la misura o *mensura*. Come oggi andare a tavola ed andare a mensa significano la stessa cosa, così anche per i romani la parola *mensa* indicava anche la tavola da mangiare.

Tanto la tavola tripartita quanto il Delta o tetractis si riferiscono ai numeri della decade. La tavola tripartita contiene i primi nove numeri distribuiti in terne e disposti in modo che il cinque è il solo numero centrale. La somma complessiva dei numeri della tavola tripartita è $45=5 \cdot 9$; quella dei numeri della tetractis è $55 = 5 \cdot 11$; e naturalmente la somma complessiva è $100 = 10^2$. La tetractis si accorda con la numerazione a base dieci e si basa sopra la derivazione dei numeri mediante lo sviluppo lineare, piano e spaziale; la tavola tripartita si basa sopra la numerazione a base tre, e sopra la funzione e l'importanza che ha il tre nella filosofia pitagorica.

Abbiamo messo in evidenza il carattere pitagorico, puro ed arcaico di tre simboli fondamentali della massoneria: il Delta luminoso, la stella fiammeggiante e la tavola tripartita.. Il significato simbolico dei numeri sacri «noti ai soli liberi muratori» va quindi determinato in conformità, e coincide con la filosofia pitagorica. Altri elementi di carattere pitagorico che si trovano in

⁽¹⁰⁷⁾ Cfr. G. LORIA, *Le scienze ...*, 753.

⁽¹⁰⁸⁾ Cfr. ORAZIO, *Satire*, I, 6 verso 73.

massoneria sono il mistero, il silenzio e la disciplina imposti al novizio, il legame fraterno simboleggiato dal nastro ondulato (¹⁰⁹).

La massoneria con la sua iniziazione cerimoniale si presenta come una continuazione nei tempi moderni dei misteri classici, affidata ad una corporazione di mestiere specializzata nell'architettura sacra. Se ne ignora l'origine: non si sa a chi attribuire i suoi rituali, il suo simbolismo, nei quali gli elementi pitagorici si trovano intimamente legati a quelli muratorii di mestiere sin dai tempi più antichi. Si tratta di una trasmissione storicamente ininterrotta dagli antichi misteri? Per esempio dalla setta pitagorica degli Acusmatici o da una antica corporazione di mestiere cui erano innestati elementi di carattere iniziatico? Oppure il carattere iniziatico misteriosofico è stato acquisito posteriormente in un tempo imprecisato da una corporazione di mestiere come più tardi avvenne con elementi rosacroce ed ermetici? A che tempo risale la leggenda ebraico-cristiana di Hiram e della costruzione del tempio di Salomone? La tradizione della Massoneria di San Giovanni è connessa coi movimenti dell'eresia medioevale od è antecedente? Tutte questioni che attendono una risposta. Comunque sia il simbolismo numerico e geometrico della massoneria è quello pitagorico e siccome è esente da ogni colorazione cristiana può darsi che la fusione del simbolismo di mestiere e del simbolismo pitagorico risalga ad un periodo qualunque post-pitagorico, e certamente non si tratta di innovazione recente ma di caratteristica assai antica.

Quanto alla luce che emana dal Delta massonico ed alle fiamme che emanano dalla stella fiammeggiante; è difficile dire se si tratti di una caratteristica arcaica od acquisita dai due simboli pitagorici. Nella letteratura pitagorica non si parla mai della tetractis luminosa e del pentalfa fiammeggiante. Forse è abbastanza naturale la comparsa di questa luce e fiamma nei due simboli più importanti di una istituzione che dà luce massonica ai profani. Ma, siccome oltre alla stella fiammeggiante nel simbolismo esiste anche la spada fiammeggiante, ci sembra che occorra cercare la spiegazione nel campo della magia, in quei caratteri di fuoco in cui secondo la tradizione ebraica furono scritte le tre parole *mane, techel, fares*. Ma non è questo il luogo per una digressione su tale argomento.

Notiamo in fine che il simbolismo muratorio è probabilmente assai arcaico. Nell'antica Roma il Pontefice Massimo costituiva il ponte tra la riva umana e la riva divina, titolo e funzione che in seguito si è arrogato il Vescovo di Roma cristiana. Il Pontefice Massimo è connesso ai tre Flaminii, e siccome questo termine è probabilmente collegato al sanscrito *brahmani* esso consente di risalire per l'etimologia e per la funzione ai tempi in cui l'indo-europeo era una lingua parlata e non come oggi una lingua sconosciuta.

Tornando ancora alla tavola da tracciare osserviamo che il rituale del grado di apprendista dice talora che essa rappresenta la memoria, senza in alcun modo giustificare questa affermazione. Questa interpretazione appare così arbitraria; mentre si può facilmente collegare alla nostra interpretazione ricordando che Mnemosine, la memoria, è alla testa delle *nove* muse, le muse che dimostrano le orse a Dante condotto da Apollo mentre Minerva spira. Mnemosine nel mito orfico pitagorico dei due fiumi o del bivio è la fonte vivificatrice, l'Eunoè dantesco, opposta alla fonte letale del Lete. Inoltre nella concezione platonica la comprensione non è altro che una anamnesi, un ricordo; perciò la memoria ha per funzione quella di fare comprendere. Se non si tiene presente questo significato della memoria secondo gli antichi, non si vede perché la memoria debba avere

(¹⁰⁹) L'espressione: operaio attivo e senza ricompensa, usata frequentemente in massoneria, ricorda da presso la massima pitagorica: $\sigma\chi\alpha\mu\alpha$ καὶ $\beta\acute{\epsilon}\mu\alpha$ ἀλλ'οὐ $\sigma\chi\alpha\mu\alpha$ καὶ $\tau\rho\acute{\iota}\beta\alpha\lambda\omicron\nu$ ossia uno schema ed un passo, ma non uno schema ed un triobolo.

per simbolo la tavola da tracciare, soprattutto se non si ricorda che questa tavola è tripartita e divisa in nove caselle che rappresentano i nove numeri entro la decade.

Lo studio che abbiamo fatto di questi nove numeri ci ha condotto a riconoscere il carattere pitagorico del delta massonico, della stella fiammeggiante e della tavola da tracciare, la loro connessione ed armonia ed in parte il loro senso simbolico. I rituali del primo e del secondo grado, i soli primitivi e strettamente muratorii, riacquistano in tal modo il loro senso coerente e profondo che altrimenti resta nascosto dai sedimenti e dalle incrostazioni posteriori.

CAPITOLO VII

La Grande Opera e la Palingenesi

Di vista in vista infino alla più bella.
DANTE, *Par.* XX, 9.

Abbiamo veduto che la Massoneria, secondo i suoi Statuti e la tradizione, ha per fine il perfezionamento del singolo individuo umano. Il manoscritto della biblioteca Bodleyana, attribuito ad Enrico VI d'Inghilterra, afferma che «la massoneria è la conoscenza della natura e delle singole forze che sono in essa». Il perfezionamento dell'uomo è legato alla conoscenza od al riconoscimento della natura umana e delle inerenti possibilità. Occorre quindi attuare l'antico precetto dell'oracolo di Delfo: conosci te stesso; occorre indagare entro di noi il mistero dell'essere, considerare la vita umana, le sue funzioni, i suoi limiti e le possibilità di superarli, intervenire attivamente nel suo andamento non abbandonandola alla deriva, scoprirne e ridestarne i germi latenti, i sensi e poteri ancora ignoti, dormienti od occulti. Occorre compiere un'opera di edificazione spirituale, una trasmutazione, conseguir virtute e conoscenza, sì che il verme strisciante in terra formi l'angelica farfalla che vola alla giustizia senza schermi. Occorre costruire e non soltanto pregare od adorare, oppure osservare, sperimentare e speculare; e costruire sopra fondamenta sicure e salde e non sopra credenze, pregiudizii ed illusioni.

Molti suppongono che questa opera di edificazione spirituale vada senza altro intesa unicamente o soprattutto in senso morale. Il libero muratore è stato prescelto tra i profani ed accolto nella fratellanza perché giudicato suscettibile di miglioramento; ed, ammettendo tacitamente che non vi siano e non possano essere degli esseri al di sopra dell'umanità, il solo perfezionamento possibile diviene quello morale. Questo miglioramento ha, per modello ed ideale l'uomo virtuoso e dabbene, il galantuomo e niente altro, anche se talora si rischia di esaltarne semplicemente la peculiare dabbennaggine. In Inghilterra per esempio vi sono dei cristiani che venerano in Gesù l'uomo perfetto, il migliore uomo che sia mai esistito, non curandosi di Socrate e di qualche altro pagano, e per essi il modello della perfezione è rappresentato dalla figura ideale del mite Gesù.

Naturalmente questi paladini della bontà e della morale presuppongono di conoscere con sicurezza quale sia la giusta morale, la pura morale; essa, è la *loro* morale; ed essi scambiano questa loro credenza per una conoscenza, non ammettono in proposito dubbi o riserve né in sé né negli altri perché ne sarebbero offesi i loro sentimenti e la loro fede. Ed infatti la morale non è altro, secondo il Pareto, che una particolare forma di credenza religiosa coi suoi pregiudizii, i suoi dogmi accettati e condivisi dalla massa dei fedeli anche se non codificati in un credo esplicito e definito, la sua ipocrisia, i suoi compromessi e la sua intolleranza fanatica e selvaggia. Il moralista è magari un uomo dabbene il quale cammina, come dice una versione del Vangelo, «con le pedate del Signore», ma guai a pestargli il callo della morale, allora si offende e sente di avere il diritto ed il dovere di rivoltarsi come una vipera. In pratica il dominio tra i fratelli della morale profana è così

radicato ed incontrastato che tutti dimenticano come il profano ed ancor più il libero muratore dovrebbe essere un uomo libero, libero da ogni sorta di catene e pregiudizii, non asservito ad alcuna credenza religiosa, moralistica, filosofica e politica; e nessuno pensa a verificare se in questo campo esista in sé e negli altri questa presunta indipendenza; cosicché parlando di perfezionamento resta tacitamente sotto inteso che si intende parlare di perfezionamento morale e niente altro. Di tutto il resto non si sospetta neppure l'esistenza. La massoneria lavora ad innalzare templi alla virtù ed a scavare fosse al vizio; e questo, aggiungono essi, è tutto.

Inoltre, con la logica primordiale dei sentimenti offesi, il moralista è indotto a condannare come una empietà l'inosservanza o la negazione della sua morale, ed a ritenere che la pretesa di superarla o semplicemente di non occuparsene equivalga a dare via libera ad ogni sorta di sfoghi e di istinti. I fatti hanno mostrato, secondo il moralista, che la teoria nietzschiana del superuomo conduce inevitabilmente agli orrori sadistici di cui si è macchiato l'*Herren volk*; mentre invece il povero Nietzsche, il nemico della *moralina*, ritenuto un santo dal popolo torinese, si sentiva greco, pagano e non tedesco, e sin da allora aveva percepito e segnalato il pericolo che si profilava nell'accentuarsi dell'accento arrogante e da caserma della lingua tedesca. Il freno della morale non è affatto l'unico freno che possa impedire alla bestia umana di scatenarsi; per la maggioranza occorre la legge ed i carabinieri senza poter impedire ai furbi di eludere la legge, sgusciare tra le maglie della morale, rasentare il codice e salvare la morale, l'etica e l'etichetta. Per altri in fine i precetti della morale sono arbitrari, ingiusti, superflui, troppo indulgenti e sin anco immorali da un punto di vista più elevato. Raggiunto un certo punto di maturità spirituale il bisogno di sentirsi interiormente puliti rende in sopportabili le macchie della coscienza, indipendentemente da ogni credenza, ingiunzione, abitudine e tornaconto.

Inoltre la morale è un costume, *mos*, variabile nello spazio e nel tempo, e non può fornire quel campione universale di misura che occorrerebbe per misurare la perfezione senza restare schiavi delle credenze particolari di una determinata regione, civiltà ed epoca. In un certo momento storico la condotta degli Dei nella mitologia pagana apparve immorale e scandalosa, e la propaganda cristiana trasse profitto da questa esigenza del sentimento morale. Ed oggi molte cose cominciano ad essere poco gradite moralmente cui un tempo non si badava. Il santo miracolo del profeta Eliseo che, deriso da dei ragazzi per la sua calvizie, si arrabiò e ne fece sbranare quarantadue dagli orsi, non ci sembra più un titolo di santità ma una mascalzonata che Gesù, Socrate e San Francesco sarebbero stati incapaci di concepire. Se il profeta Eliseo fosse stato cristiano avrebbe forse lasciato a Dio il compito di vendicarlo, perché in grado di compiere migliore vendetta, ma anche questa astensione dalla vendetta, non ci sembra molto nobile. La *hantise* sessuale che pervade le religioni derivate dall'ebraismo e che nel cristianesimo compare ad esempio nella circoncisione cui è dedicato il primo giorno dell'anno e nel dogma della immacolata concezione, è di gusto un po' *grossier*; e le esortazioni e le minacce che fanno appello al tornaconto per indurre alla *metanoia*, offrire il paradiso, e la salvezza dal pianto, dallo stridor dei denti e dall'ira di Dio, hanno un sapore un po' troppo mercantile per il nostro palato. Diciamo pure che non ci sembra molto simpatica la figura di un Padre eterno iracundo, vendicativo e sempre intento ad indurre in tentazione il povero credente sì da rendere opportuno il supplicarlo ad astenersi da un simile passatempo se proprio non ne può fare a meno. Si potrebbe seguitare ad addurre altri esempi, ma smettiamo per non scandalizzare le anime timorate.

Ma, anche se il senso morale fosse meno variabile e grossolano, dovremmo egualmente tenerlo da parte, perché la morale non ha nulla o ben poco a che fare in questioni di arte e di scienza ed in particolare con la analisi delle facoltà fisiche, mentali e spirituali e col loro sviluppo. La morale, come il sale, è un condimento che non va messo dappertutto. Per apprendere l'anatomia e la

fisiologia è indifferente l'essere un santo od un farabutto, il teorema di Pitagora può essere compreso dal ladro ed incompreso dall'uomo dabbene, e tanto il francescano che il capitalista possono con congruo allenamento divenire degli acrobati. Come la forza muscolare e la capacità intellettuale non hanno nulla a che fare con la morale, la stessa cosa accade, o per lo meno può accadere, per le facoltà spirituali o per le facoltà meno note ed i sensi occulti dell'organismo che si manifestano solo raramente e sporadicamente. Noi non facciamo l'apologia di Vanni Fucci, bestia; vogliamo solo distinguere quel che non va confuso; vogliamo solo rispettare puramente e semplicemente i fatti e la verità districandoci dalla superstizione della religione moralistica e dalla idolatria per il «mito virtuista». Però non ci basiamo sopra l'ipotesi affatto gratuita che non esista per l'uomo altra possibilità di perfezionamento che il miglioramento morale e religioso, circoscritto per di più nei limiti di una religione e di una morale particolari.

Questa operazione di sviluppo e perfezionamento spirituale ha dunque un carattere puramente *tecnico*, e nella tradizione muratoria ed in quella ermetica si chiama, come sappiamo, la grande opera, da compiersi secondo le norme dell'arte o *tecne*. In entrambe le tradizioni è espressa mediante un simbolismo, rispettivamente muratorio geometrico ed alchemico.

La materia prima che è oggetto della trasmutazione muratoria è la pietra grezza, ossia il novizio libero muratore; ed è quindi una materia già scelta, e giudicata atta allo scopo. Questa pietra grezza va sgrossata, rettificata, squadrata e levigata sino ad assumere la forma della pietra cubica della maestria. Strumenti di questo lavoro sono la squadra ed il compasso: il lavoro va compiuto passando dalla squadra al compasso ossia dalla rettitudine alla misura, e tra squadra e compasso che è quanto dire segretamente, poiché si tratta per la natura stessa dell'operazione di un travaglio interiore, intimo ed occulto.

La cerimonia iniziatica del terzo grado rappresenta la grande opera mediante la morte e la resurrezione di Hiram, cui la leggenda muratoria attribuisce la costruzione del tempio di Salomone in Gerusalemme (il tempio della sapienza nella città santa); e la parola sacra di maestro che era andata perduta a causa della morte del Gran Maestro viene sostituita con l'attuale parola sacra del terzo grado. La leggenda di Hiram però non appartiene al patrimonio arcaico muratorio; ed il rituale del terzo grado è opera di uno sconosciuto, che lo compose verso il 1720 traendone dalla Bibbia solo alcuni elementi.

Nella Bibbia Hiram è un fabbro e non un muratore, è di Tiro, e figlio di una vedova della tribù di Nephtali. Il re Salomone lo chiama a Gerusalemme per affidargli dei lavori di metallurgia, e non la costruzione del tempio. La leggenda del terzo grado trasforma invece Hiram nel grande architetto del tempio di Gerusalemme, ne fa insomma un massone accettato: e siccome questo personaggio figura già nel secolo precedente nella letteratura ermetica insieme a Salomone ed alla regina di Saba (¹¹⁰), può darsi che l'ignoto autore del rituale del terzo grado massonico si sia ispirato alla figura ermetica di Hiram e non semplicemente alla figura biblica di Hiram. Questa ipotesi, oltre a spiegare la competenza iniziatica del compilatore del rituale del terzo grado, trova conferma nel fatto che la parola di passo del grado non è altro che il nome del primo fabbro (secondo la Bibbia), nome che gli ermetisti identificano con quello latino del Dio del fuoco, Vulcano: un antico libretto italiano in lamine di piombo rappresenta questo Tubalcain con la squadra in una mano ed il compasso nell'altra, sostituendolo alla figura del Rebis ermetico pure

⁽¹¹⁰⁾ Esiste un'opera del celebre rosacroce MICHELE MAIER, la *Septimana philosophica* (1620), scritta sotto forma di dialogo, i cui interlocutori sono: Salomone, Hiram e la Regina di Saba. Anche in un'altra opera, i *Symbola Aureae Mensae* (1617), il Maier aveva già posto in connessione questi tre personaggi. Cfr. anche la rivista *Ignis*, a. 1925, p. 307.

armato di squadra e di compasso nel testo ermetico del Mylius. Tubalcain-Vulcano ed Hiram sono due artefici e la squadra ed il compasso, strumenti muratorii, sono loro egualmente familiari: e le raffigurazioni che ci sono pervenute e il rituale del terzo grado testimoniano l'antichità e la tenacità della connessione tra i due simbolismi ermetico e massonico della grande opera.

Come curiosità notiamo che anche il massone italiano Quirico Filopanti, nella sua molto fantasiosa sintesi scientifica ed istorica dove pare abbondino informazioni di fonte medianica, connette il dio Vulcano tanto ad Hiram che chiama grande architetto del tempio di Salomone quanto a Wren che il Filopanti chiama Presidente della Frammassoneria inglese, architetto di San Paolo e della ricostruzione di Londra dopo l'incendio del 1666⁽¹¹¹⁾.

La leggenda di Hiram ha avuto anche fortuna nel campo letterario perché è stata ripresa e sviluppata dallo scrittore Gérard De Nerval, che nel suo *Voyage en Orient* lo fa divenire un rivale di Salomone ed impersonare lo spirito democratico chiamato a trionfare della regalità.

Queste immaginarie benemerenze democratiche della vita molto romanzata del grande architetto del tempio gli hanno procurato molte simpatie da parte di molti scrittori massonici: le quali però non possono giustificare l'alterazione della leggenda massonica di Hiram in tal modo perpetrata. Per esempio lo storico italiano G. De Castro, nel suo *Mondo segreto* edito nel 1864, riporta le fantasie letterarie di Gérard De Nerval senza neppur menzionare questo autore prendendole dal libro: *Les francs-maçons*, Parigi, 1862 di Alex. de Saint-Albin: ma il De Castro non era un massone e riconosce di avvolgersi tra le ambagi del mito (G. De Castro, *Il mondo segreto*, vol. IV pag. 39 e seg.). Un altro italiano, Ulisse Bacci, che è stato per lunghi anni Gran Segretario del Grande Oriente d'Italia, nel suo *Libro del Massone italiano* dà anche egli questa variante spuria del rituale del terzo grado, senza citare né il De Castro né il Saint-Albin, né il De Nerval, e data l'autorità massonica del Bacci il lettore ed il catecumeno sono condotti a formarsi una conoscenza alterata del rituale del terzo grado massonico. Dispiace dovere fare di queste rettifiche, ma sarebbe anche più spiacevole lasciare dilagare e permanere questa erronea variante del rituale e sentirsi poi rinfacciare che nei testi ufficiali od ufficiosi della massoneria, si ammanniscono come elementi della tradizione e della leggenda brani di romanzi di autori abbastanza recenti.

Nella leggenda di Hiram si intrecciano elementi massonici ed elementi ermetici; ma in generale nell'ermetismo la grande opera della trasmutazione spirituale ha per simbolo la grande opera corrispondente dell'alchimia, ossia la trasformazione della materia prima in pietra filosofale) e la trasmutazione dei metalli ignobili in oro.

La tradizione ermetica, araba ed europea fa capo ad una tradizione alessandrina che si richiama al padre dei filosofi (ermetici), il dio egizio Thot, identificato dai Greci con Ermete (trismegisto) ossia Mercurio trismegisto: mentre la parola alchemia è un termine arabo che designa la scienza della trasmutazione chimica. Ma sin dai tempi più antichi ermetismo ed alchimia si trovano collegati e scambiati l'uno per l'altro, e può darsi che le due trasmutazioni fossero considerate come due forme parallele della grande opera egualmente possibili e forse connesse l'una l'altra. Questa antica affinità ha in seguito offerto agli ermetisti intenti alla trasmutazione spirituale la comoda maschera dell'alchimia quando divenne preferibile essere derisi perché pazzi all'essere arsi perché eretici. Non è facile impresa rintracciare i legami e le trasmissioni che uniscono massoneria ed ermetismo, la stessa difficoltà e forse anche più ardua si presenta nelle indagini relative ad ermetismo e rosa croce, rosa croce e fedeli d'amore, fedeli d'amore e templari ecc. Può darsi che vi siano stati ermetisti che erano anche alchimisti, può darsi vi siano stati semplici alchimisti persuasi che tutti gli ermetisti non fossero come loro che degli alchimisti intenti alla ricerca della pietra di

⁽¹¹¹⁾ QUIRICO FILOPANTI, *Dio liberale*, Bologna, 1880, pag. 423.

proiezione per trasmutare il piombo in oro; ma vi sono certamente stati ermetisti cui non importava nulla della trasmutazione alchemica, e che nella terminologia alchemica vedevano solo un comodo mezzo per nascondere ed esporre ad un tempo quanto stava loro a cuore. E, nonostante il sistematico mimetismo alchemico, abbondano nella letteratura ermetica le derisioni degli alchimisti volgari, chiamati soffiatori perché sempre affacciati a soffiare aria coi mantici nei loro fornelli. Gli ermetisti dichiarano enfaticamente che i loro metalli non sono metalli volgari ma metalli viventi, che l'oro cui aspirano non è l'oro volgare ma l'oro vivente od oro filosofico; così come in una prima fase dell'operazione hanno per scopo di ottenere l'argento vivo, l'acqua di argento, o idrargirio, o mercurio ossia Ermete.

La materia prima da trasmutare in pietra filosofale, dicono gli ermetisti, si trova dovunque a portata di mano, cosa manifesta trattandosi dell'organismo stesso dell'operatore. L'opera si attua chiudendo ermeticamente tale materia dentro l'Athanòr o vaso filosofico e riscaldando poi col fuoco filosofico secondo le norme del rito e dell'arte regia.

La chiusura ermetica corrisponde al mistero della *middle chamber* ed al silenzio e mistero dei pitagorici. Il fuoco lento e costante che da solo compie l'opera è il simbolo dell'ardore spirituale, il *tapas* degli asceti indiani, al quale per altro non va attribuito semplicemente un significato allegorico perché, secondo riferisce la David-Neel nei suoi libri sopra le iniziazioni tibetane, è possibile con congrue pratiche ascetiche giungere ad emettere dal corpo vero e proprio calore tanto quanto ne occorre per fondere considerevoli quantità di ghiaccio.

Secondo la formola di Basilio Valentino la grande opera consiste nel visitare la parte inferiore (od inferiore) della terra, ossia del corpo ed organismo terrestre, nel rettificare e nel rinvenire la pietra filosofale ed occulta. La densità corporea ed i vincoli che legano ad essa la parte spirituale vengono superati mediante una soluzione o scioglimento od analisi ottenuta col solvente universale od acqua regia o vitriol, e gli spiriti così liberati vengono raccolti, condensati e coagulati. Finita l'operazione, dalle ceneri o *caput mortuum* nasce il «figlio dell'arte» od anche il piccolo re, o regolo d'oro, o basilisco, od anche *Rebis*, o Fenice. Tutte queste denominazioni ed i disegni corrispondenti si ispirano sempre al carattere anfibio della nuova vita. Ad esempio la purpurea ed aurata Fenice è il fenicottero, uccello acquatico. Il *Rebis* è un importante simbolo ermetico per rappresentare il frutto della grande opera; ha la figura di un essere bicipite, regalmente incoronato, ed a confermarne la natura duplice ed anfibia viene spesso rappresentato in piedi sopra un animale anche esso anfibio come un drago od un coccodrillo. Il *Rebis* è un simbolo che fu adoperato nel trecento anche dai «Fedeli d'Amore» per esempio da Barberino da Mugello; e compare anche, come abbiamo veduto, armato di squadra e compasso nelle mani, i due strumenti della grande opera muratoria, in testi ermetici e rosacruciani. Queste circostanze permettono di intuire i rapporti ed i legami intercorsi tra fedeli d'amore, ermetisti e massoneria, e non si possono spiegare che riconoscendo al *Rebis* un significato che connette e trascende i diversi aspetti che ha assunto nel tempo la tradizione della grande opera. La parola *rebis* è interpretata *Res bina*, cioè cosa doppia, dagli ermetisti: ed indica appunto il carattere anfibio dell'essere nato ad una seconda vita senza perdere la prima, e quindi vivente di doppia vita, quella umana ordinaria e quella spirituale e superiore. Triplice, secondo gli ermetisti, era il frutto della operazione: la salute in tutti i suoi sensi cioè salute del corpo e salvezza dell'anima, o sopravvivenza ed immortalità, la sapienza e la potenza o ricchezza.

In altri testi ed autori l'ermetismo ricorre al simbolismo della distillazione intesa ad ottenere la quintessenza (quinta essenza) di un liquido. Si riscalda la materia prima nell'alambicco. si separa la parte densa dalla parte sottile mediante l'evaporazione, si condensa la parte sottile evaporata, si

distilla a parte e si finisce con l'ottenere l'acquavite (*aqua vitae*), l'acqua della vita, l'acqua ardente, l'elisir di lunga vita, lo spirito puro o concentrato (Raimondo Lullo o pseudo Raimondo Lullo).

Secondo quanto riferisce Apuleio ⁽¹¹²⁾ Pitagora diceva che non da ogni legno si deve scolpire un Mercurio. Analogamente per la massoneria non qualunque profano può divenire un massone e non tutti gli apprendisti e compagni possono divenire dei maestri, perché si tratta di sviluppare un dono naturale e non di creare dal nulla, e non vi è arte regia che possa fare un Paganini di chi non è fornito dell'orecchio necessario. Ed analogamente sin anco il soffiatore, l'alchimista sempliciotto tutto preso dal miraggio dell'oro, si atteneva al precetto che per ottenere dell'oro bisogna partire da una materia prima già contenente dell'oro, e per questa ragione l'ermetismo greco-alessandrino dava all'operazione il nome di diplomi, ossia raddoppiamento o moltiplicazione dell'oro. Dal punto di vista chimico la speranza degli alchimisti era illusoria, sebbene oggi il principio rigoroso della conservazione della materia sia stato sostituito da un principio complesso che lega la massa all'energia: ed è stato Agrippa, mago ed ermetista, il primo, crediamo, che abbia constatato sperimentalmente la vanità del procedimento alchemico, riconoscendo che l'oro impiegato era eguale in peso all'oro ottenuto.

La esistenza degli alchimisti puri e semplici che in buona fede si illudevano di essere degli ermetisti non giustifica la superficiale credenza della scienza contemporanea che riduce tutto l'ermetismo ad alchimia, e dopo questa affrettata confusione e conclusione si fa beffa di ciò che non conosce. In simil modo al tempo dei «Fedeli d'amore» vi furono dei semplici poeti in volgare persuasi di appartenere senza altro alla eletta schiera dei rimatori «del dolce stil nuovo», la quale sotto il velame delli versi strani ed in linguaggio *chiuso* cantava d'amore, di Beatrice, Laura, Fiammetta e simili altre donne: e Dante li deride. La cultura contemporanea che fa tutto un fascio degli ermetisti e degli alchimisti si comporta con pari intelligenza rispetto alla letteratura in volgare dei primi secoli; pregiudizi letterarii e religiosi ne impediscono la comprensione già di per sé stessa difficile al profano dall'uso costante del linguaggio allegorico. E come se questi fattori di offuscamento non bastassero si è fatta avanti anche la psicoanalisi che pretende interpretare la letteratura d'amore, la Divina Commedia, e gli scritti dei Rosacroce e degli ermetisti, spiegando con lo stesso metro e simbolismo il senso occulto per esempio di Dante e dello Stecchetti. Non si accorgono questi scrittori psicoanalisti, che vedono dappertutto le costellazioni interiori in perpetua ed inconscia ricerca di una scarica, non si accorgono di essere proprio essi i veri schiavi del complesso sessuale, essi che sistematicamente subodorano e perseguono dappertutto l'ossessione sessuale e pornografica come lo scarabeo stercorario persegue ed appallottola la prediletta materia prima.

Abbiamo rapidamente tratteggiato le linee principali del simbolismo massonico ed ermetico della grande opera ed abbiamo distinto il perfezionamento massonico da quello moralistico, e l'ermetismo dall'alchimia. Fatte queste distinzioni, le somiglianze tra i due simbolismi usati dalla massoneria e dall'ermetismo per esprimere l'argomento della grande opera sono abbastanza facili da rilevare, e talora la terminologia è assolutamente la stessa. Queste somiglianze sono messe in evidenza nei rituali di alcuni alti gradi e di alcuni riti come quello dei Filaleti, e si trovano esposte per esempio nell'*Etoile Flamboyante* del Barone De Tschoudy.

Anche il pitagoreismo ha per scopo essenziale questa grande opera di edificazione spirituale che designa col termine di palingenesi. Anche nel pitagoreismo si incontra la difficoltà del mistero e del segreto, aggravata dalla scarsezza degli scritti e documenti pitagorici pervenuti sino a noi. L'etimologia della parola palingenesi o più esattamente palingenesia è semplice. *Palin* significa di

⁽¹¹²⁾ APULEIO, *De Magia* e cfr. CHAIGNET, I, 114.

nuovo, e *genesia* significa generazione o nascita; quindi la parola palingenesi significa nuova nascita, o rinascita o seconda nascita. Se non che non tutti concordano nel significato da attribuire a questa palingenesi. Taluni pensano che essa debba necessariamente essere preceduta dalla morte del corpo e che perciò questa seconda nascita dell'uomo sia quella che oggi si chiama reincarnazione dello stesso individuo in un altro corpo, presso a poco nel senso attribuito a questa parola dagli spiritisti e dai teosofisti. Altri pensano che le due parole corrispondono a due concetti che vanno tenuti distinti; e, mentre non è affatto sicuro che Pitagora abbia insegnato la teoria della reincarnazione almeno come legge generale, è certo invece che la dottrina della palingenesi, che si deve o per lo meno si può compiere durante la vita umana, prima della morte del corpo, è una delle dottrine centrali del pitagorismo. Osserviamo anzi tutto che per definizione l'individuo umano risulta dall'assieme del suo corpo fisico, dell'anima e delle rispettive funzioni a noi note, di modo che morto e distrutto il corpo potrà tutt'al più accadere che l'anima assuma un *altro* corpo e costituisca un altro individuo, diverso dal precedente, seppure legato ad esso dalla permanenza della stessa anima. Si potrà dare poco peso a questo cambiamento di corpo, come se si trattasse di un cambiamento di vestito, ma per poter dire che è l'individuo che ha trasmigrato in un altro corpo bisognerebbe che il cambiamento si riducesse alla sostituzione del corpo e che tutti gli altri fattori dell'individuo rimanessero inalterati o per lo meno riconoscibili per una parziale permanenza; ma quando il senso di identità col precedente individuo non esiste, quando ricordi di esperienze di un'altra vita non ce ne sono, quando si crede di essere la reincarnazione di uno spirito sommo perché così ha rivelato la cartomante od il tavolino spiritico, mentre questa reincarnazione di uno spirito sommo raggiunge le più alte vette della mediocrità, non si vede quale significato possa accordarsi alla parola reincarnazione. Si racconta che Pitagora si ricordasse di essere stato precedentemente Euforbo e ne riconoscesse le armi; ma anche se il racconto corrisponde a verità non basta per dire: *ab uno disces omnes*, anche perché Pitagora non era un uomo qualunque. Filolao, antico ed eminente pitagorico italiano, non solo non parla di metempsicosi o trasmigrazione in altri corpi, ma in un suo frammento ⁽¹¹³⁾ dice solamente che quando la morte separa l'anima dal corpo essa conduce nel Cosmo una vita incorporea; ammette cioè l'esistenza dell'anima, la sua sopravvivenza alla morte del corpo, e la possibilità di una vita incorporea.

Pare quindi che Pitagora insegnasse la dottrina della metempsicosi o trasmigrazione delle anime, ma non sappiamo se questa dottrina sia stata trasmessa fedelmente e si possa ad esempio desumere dalla esposizione che ne fanno Virgilio ed Ovidio. Comunque palingenesi e trasmigrazione sono due parole e due concetti distinti.

La parola palingenesi è usata anche nel Nuovo Testamento, ma è usata in luogo della parola *anastasi* che significa resurrezione che non si può identificare con la palingenesi, sebbene il senso della parola *anastasi* sia nel Vangelo alquanto oscillante. Infatti in alcuni passi della Scrittura si parla di resurrezione dei morti, in altri di resurrezione dai morti, in altri ancora di resurrezione della carne. Questo terzo concetto è il più grossolano e, sebbene San Paolo vi si opponesse esplicitamente, questo concetto eminentemente ebraico ha finito col prevalere e coll'assommare in sé gli altri due nell'insegnamento dei Padri della Chiesa. Questa resurrezione della carne, come è concepita e rappresentata ad esempio nei dipinti di Luca Signorelli nel duomo di Orvieto, è l'unica vera e propria reincarnazione, perché con essa l'uomo, l'individuo, torna ad essere corpo ed anima tale e quale era stato, sia di suo gradimento o no. La seconda nascita diventa così un ritorno allo *statu quo ante*.

⁽¹¹³⁾ FILOL., *Fram.* 23 e cfr. CHAIGNET, I, 251.

Ma anche ammettendo con San Paolo che il corpo che risorge non è quello terrestre od una copia conforme ma sibbene un corpo spirituale o pneumatico, questa resurrezione paolina differisce dalla palingenesi pitagorica perché a differenza di questa ultima presuppone necessariamente la precedenza nel tempo della morte corporea ordinaria. La resurrezione cerimoniale di Hiram è preceduta dalla morte ed è lo stesso individuo in carne ed ossa che risorge; è una resurrezione concepita non secondo il concetto paolino ma secondo quello di Tommaso apostolo e scettico che volle toccare con mano il corpo materializzato di Gesù risuscitato.

Un altro antico e grande pitagorico, Archita di Taranto, esclude categoricamente la sopravvivenza dell'uomo, e quindi anche la reincarnazione, dicendo in un suo frammento ⁽¹¹⁴⁾ che «il vivente muore ma il morto non rivive mai», ed aggiungendo che la vita e la morte sono due cose opposte tra le quali non vi è via di mezzo. Ed Alcmeone, di poco posteriore a Pitagora e le cui dottrine hanno, secondo Aristotile, grande analogia con quelle dei pitagorici, non solo dice che l'uomo è mortale ma ne spiega anche la ragione, perché, dice Alcmeone, «non può unire la fine al principio sebbene vi siano delle anime che hanno questo dono divino»; ma vedremo tra breve come si possa intendere questo apoftegma piuttosto sibillino di Alcmeone.

D'altra parte i *Detti aurei*, che per quanto siano una tarda compilazione neo-pitagorica del periodo alessandrino, rispecchiano fedelmente la dottrina pitagorica antica, affermano esplicitamente ed enfaticamente che il risultato finale della catarsi e della ascesi del discepolo è il conseguimento della immortalità. Questa è la palingenesi che gli ultimi due versi dei *Detti aurei* promettono categoricamente al discepolo che sappia lasciare il corpo ed elevarsi sino al libero etere. La palingenesi è dunque la nascita alla vita immortale e divina, mentre la prima nascita accorda soltanto l'ingresso alla vita umana, altrimenti la palingenesi diverrebbe superflua. E, siccome i *Detti aurei* erano rivolti al discepolo umanamente vivente, essi riassumono il da fare dicendo che, abbandonato il corpo a sé stesso, occorre pervenire coscientemente, anima e spirito, sino al libero etere, cioè oltre la fascia dell'avviluppante (il *periekon* o empireo).

Durante questa estasi si compie la palingenesi. Il corpo sussiste come sussiste nel sonno profondo o nelle perdite di coscienza, ma non è più una catena, una limitazione, una tomba, come dicevano i pitagorici, per la coscienza del discepolo, il quale, avendo gradatamente acquistato autonomia ed attività nel risveglio delle sue facoltà spirituali, ascende nei cieli sino al decimo cielo od empireo ed in questa condizione del corpo e della coscienza può compiere la palingenesi. Potrà anche darsi la combinazione che la morte fisica intervenga proprio nel momento in cui si verifica la palingenesi, ma la combinazione non può essere la regola. La palingenesi è compiuta dal vivente e non dal morente, come la grande opera ermetica e massonica è compiuta dal vivente e non dal moribondo. Compiuta la palingenesi, diviene superfluo, dopo la morte fisica, il viatico di cui la religione egizia e l'orfismo munivano i morti.

Resterebbe da considerare due questioni: la prima se la conseguita immortalità si riferisce solo alla coscienza oppure comprende anche la immortalità del corpo: la seconda se la palingenesi può essere conseguita anche dai morti o meglio se il discepolo, che abbia condotto a buon punto il suo lavoro senza però condurlo a termine prima della morte corporea, possa terminarla nella sua vita incorporea. I *Detti Aurei* tacciono in proposito e noi faremo altrettanto.

La dottrina pitagorica della palingenesi afferma dunque che l'uomo vivente di vita corporea ha la possibilità, di nascere alla vita spirituale prima della morte del corpo, afferma la possibilità, di una seconda nascita ad una vita nuova senza attendere che sia terminata la vita umana mentre la dottrina della resurrezione afferma che tutti i morti devono risuscitare coi loro corpi sebbene gli

⁽¹¹⁴⁾ ARCHITA, *Fram.* 51 e cfr. CHAIGNET, I, 329.

elementi fisici siano dispersi e facciano magari parte di altri corpi viventi. In generale le religioni derivate dall'ebraismo fanno del problema della vita futura una questione escatologica, e subordinano e magari riducono tutto ad una preliminare professione di fede; molti credono che solo morendo si può nascere ad una vita spirituale; altri credono che basta morire per seguitare a vivere, e questo basta per loro; altri infine pensano che dispersi gli elementi del corpo lo siano anche quelli dell'anima se pure esistono e che la scienza non ha ancora dimostrato l'esistenza dell'anima, senza contare che in tal caso anche le bestie dovrebbero essere immortali; e la maggioranza pensa per procura ed ha fede nella sapienza di altri che hanno alla loro volta fede nella loro capacità di intendere appieno quello che si dice sia stato detto da esseri superiori. Il pitagoreismo non fa questione di credenza preliminare e non si occupa del futuro dopo la morte; pone il problema nel presente dinanzi all'uomo e dice: Agisci, prova ad attuare una indagine, a compiere un rito: purificati, medita, esplora te stesso, armonizzati, mettiti all'unisono con il tutto, concentrati in perfetto equilibrio ed armonia, dimentica (nel senso letterale della parola) il corpo, risveglia i tuoi sensi interiori, ascendi un gradino dopo l'altro e nascerai a vita nuova. Può darsi che norme tenute segrete regolassero questa trasmutazione e sviluppo: può darsi che essa venisse diretta dalla sola voce interiore del discepolo, può darsi che egli fosse assistito da ispirazioni e da interventi. Tutto dipende dalla capacità di compiere il rito, dalla fede in sé stesso e nella superiore sapienza. Il pitagoreismo prende l'uomo come è, anima e corpo, senza impantanarsi a discutere ed a definire in base a quello che l'uomo sa e capisce o non sa e non capisce quello che sia l'uomo, il corpo, l'anima, e dice: lavora, prova e riprova, ed osserva i risultati del tuo lavoro. Dopo si vedrà o meglio si potrà vedere cosa sia l'uomo, la natura, il corpo, l'anima, la vita, la morte, Iddio. Il pitagoreismo segue anche in questo campo il metodo dell'osservazione e dell'esperimento, pur prescrivendo al discepolo la venerazione per gli Dei superi ed inferi e per gli eroi indiatati. Si tratta di compiere un'opera, e non di attendere inerti il panierino della grazia o di mettere su una impalcatura che spieghi con un sistema filosofico i misteri dell'universo di cui i nostri sensi percepiscono qualche cosa.

Passiamo ora a considerare il problema dal punto di vista del tempo. Abbiamo veduto come secondo Alcmeone l'uomo sia mortale perché non può riunire il principio alla fine, sebbene vi siano delle anime che hanno questo dono divino. Riunire i due capi, il principio e la fine, la nascita e la morte, è impresa impossibile per l'uomo, dice Alcmeone. La nascita e la morte sono separate dal tempo; è il tempo che rende il problema umanamente insolubile. Ma che cosa è il tempo? Archita è il primo che si occupa della questione del tempo distinguendo il tempo fisico dal tempo psichico (fram. 9, cfr. Chaignet, I, 275). Egli dice che il tempo è la sfera del mondo ed anche che il tempo è l'intervallo della natura del tutto, Galieno dice che il tempo è la sfera del tempo che ci avvolge; Plutarco ripete che ⁽¹¹⁵⁾ Pitagora diceva che il tempo era la sfera del periekon, ed in un altro passo ⁽¹¹⁶⁾ riporta come Pitagora, interrogato cosa fosse il tempo, rispose che era l'anima del cosmo. Queste definizioni si riferiscono ben inteso al nostro tempo, al tempo umanamente concepito e vissuto, ed affermano che questo tempo è determinato dalla fascia che avvolge il cosmo; affermano quindi implicitamente, la relatività di questo tempo cosmico ed umano; e la, esistenza di un altro tempo al di là della fascia nel libero etere, o di un altro modo di essere, o di sentire e vivere il tempo. Archita lo chiama il tempo psichico, Dante lo chiama la durata o l'eternità.

⁽¹¹⁵⁾ PLUTARCO, *Placita Philosoph.*, I, 19.

⁽¹¹⁶⁾ PLUTARCO, *Quaest. plat.*, VIII, 4. 3 e cfr. DELATTE, *Etudes*, 278.

Passando dal tempo umano al tempo psichico la difficoltà di riunire il principio con la fine diviene superabile; ed i due problemi della immortalità e del tempo si compenetrano. Dante tratta la questione proprio in questo modo. Egli chiama cielo quieto (*Conv. II, 13, Par. XXX, 52*) il decimo cielo, ossia l'empireo o sfera, del fuoco, e, mentre questo cielo è quieto, le altre nove sfere ammettono il movimento. Dante si collega alla concezione aristotelica e tolemaica; ma anche secondo i pitagorici è il movimento, l'oscillazione, la vibrazione che stampa nel cosmo la successione del tempo; il tempo si pone in movimento e fluisce nell'attimo fuggente tra un passato che non è più ed un futuro che non è ancora. La città santa è soltanto 'in questo cielo quieto; ed è qui che Beatrice trae Dante e gli dice:

Mira

*Quanto è il convento delle bianche stole!
vedi nostra città quanto ella gira! (Par., XXX, 128-30)*

ed è soltanto dopo essere salito sino a questo cielo e tra le bianche stole che Dante può dichiarare di avere sorpassato lo stadio umano

*Io che al divino dall'umano
All'eterno dal tempo era venuto
E di Fiorenza in popol giusto e sano. (Par. XXXI, 37-39).*

Dante supera l'antinomia di Alcmeone passando dalla coscienza umana alla coscienza divina, e con questo passaggio diventa possibile il passaggio dal tempo fisico al tempo psichico, ed in questo tempo psichico il principio e la fine si riuniscono, e l'uomo non è più necessariamente mortale.

Il movimento della natura del tutto, per adoperare il linguaggio di Archita, cui è dovuto il tempo fisico, è musicalmente un intervallo. Il cosmo si muove, vibra, e vibra con una armonia di cui i pitagorici trovano le leggi numeriche. La musica, scienza ed arte insieme, in cui per tradizione si suole concludere con l'accordo maggiore, la musica sacra permette all'uomo di mettersi in armonia con l'armonia delle sfere. Eccoci così ricondotti ad un problema di armonia e quindi alla considerazione numerica del tetracordo e della tetractis. Un unico nesso connette tra loro le varie scienze del pitagoreismo e le connette alla grande opera della palingenesi, ossia della armonizzazione dell'individuo col tutto. La musica calma, purifica, innalza. La leggenda racconta come Pitagora riuscisse col solo suono della lira a ridurre alla ragione un ubriaco furioso. L'insegnamento della musica e del canto era impartito nella Scuola Pitagorica e faceva parte dell'educazione greca in generale. Particolare importanza aveva la musica nella catarsi pitagorica; ed Ulisse è rappresentato intento ad ascoltare il canto delle Sirene, le quali secondo gli acusmatici compaiono nella tetractis e secondo Platone costituiscono l'armonia delle sfere. La lira era considerata lo strumento più atto per la musica sacra, come oggi l'arpa o l'organo.

Si può chiedere cosa possa avere indotto Pitagora alla sua definizione del tempo ed Archita alla sua distinzione tra tempo fisico e tempo psichico. Possiamo solo fare delle supposizioni in proposito. Anzi tutto la constatazione che l'attimo fuggente, per quanto divenga irrimediabilmente passato, resta presente nella memoria, nella psiche, e come tempo psichico sopravvive al fluire del tempo fisico. Poi esiste tutto un ordine di fenomeni che permettono di intravedere come la nozione del tempo possa anche essere diversa da quella consueta. In punto di morte il Gran Maestro della massoneria italiana, Mazzoni, disse: Ho perduto la nozione del tempo e dello spazio, bisogna andare; il che mostra come la nozione della coscienza sia indipendente dalla nozione del tempo e dello spazio, e si potrebbero riferire altre esperienze che conducono alla stessa conclusione. Si dice pure che, sempre in punto di morte, accade talora di vedere correre dinanzi alla mente come in un

lampo la vita trascorsa, ed anche questa esperienza, forse nota anche al tempo dei pitagorici, trascende la consueta nozione del tempo. Altri fenomeni che possono aver suggerito la teoria pitagorica del tempo sono le previsioni del futuro, le profezie, gli oracoli ed i così detti fenomeni di paramnesia. La incredulità contemporanea nega in blocco la genuinità di questi fenomeni, oppure sostiene che è possibile darne semplici spiegazioni, e vi sono perfino di quelli che sostengono la impossibilità di questi fenomeni perché bisognerebbe ammettere la predeterminazione del futuro e rinunciare al libero arbitrio. Altri dicono che i soggetti di queste esperienze sono degli squilibrati, degli anormali; e che perciò non occorre tenere conto delle loro esperienze.

Ora chi ha veduto con assoluta precisione di particolari lo svolgersi di intere ed imprevedibili scene della propria vita a distanza di mesi prima del loro effettivo avverarsi nel tempo umano, ed avendone prima dato comunicazione per iscritto, non può neppure ammettere un inganno da parte della memoria, non può cancellare dalla propria coscienza queste esperienze per rispettar lo scetticismo altrui, per attendere il responso della scienza, e per tenere in piedi acrobatiche teorie sul destino ed il libero arbitrio. Lo stesso dicasi per chi ha avuto la ventura di constatare con esperienza personale diretta la previsione nei minimi particolari il distanza di anni di fatti importanti sgorgare dalla bocca ignara di un oracolo come acqua sorgiva. Più comuni sono i fenomeni di paramnesia, che consistono nella strana e straordinaria sensazione di avere già vissuto e veduto una scena della vita via via che essa effettivamente si svolge. Si dice che sia una illusione della memoria, senza naturalmente confortare in alcun modo questa asserzione, si affibbia al fenomeno il nome scientifico di paramnesia; ed il fenomeno è così collaudato, passa agli atti e cessa dal dare fastidio. Ma lo squilibrato che ha avuto l'esperienza non può lavarsene le mani con altrettanta semplicità; sa bene, *sa*, che non è stato vittima di una illusione ma protagonista lucido di una genuina percezione del vero; ed anziché vedere in tali fenomeni un sintomo ed un effetto (li squilibrio noi pensiamo che questi fenomeni si possono verificare nei momenti di perfetto equilibrio e perfetta armonia, diciamo *si possono* verificare in tali condizioni ma non diciamo che queste condizioni siano necessarie, o sufficienti, o le sole, o per tutti. Così siamo indotti a pensare, per esperienza personale, che conta in proposito più di tutto il resto. Ora se la sola nostra esperienza personale basta a darci la conoscenza di parecchi fatti in cui affiora una coscienza del tempo ben diversa da quella consueta umana, siamo indotti a ritenere che anche altri ed in particolare gli antichi pitagorici abbiano avuto esperienze dello stesso genere; e allora i pitagorici non avrebbero fatto altro che inserire questa percezione e distinzione del tempo fisico e del tempo psichico nella loro cosmologia, attribuendo o riconoscendo alla sfera dell'avviluppante la proprietà di operare o di corrispondere a questa distinzione tra tempo e durata.

Questo per quanto concerne la cosmologia pitagorica. Per quanto concerne l'ascesi, ne segue che se l'uomo ha la possibilità di trascendere il tempo fisico in queste esperienze spontanee e sporadiche, questa possibilità può divenire uno degli obbiettivi della stessa asceti. Le rare e spontanee esperienze sono come fuggevoli balenii della realtà nell'oscurità della notte, che permettono di sperare ed aspirare alla conquista deliberata, cosciente e permanente di tale visione, ossia di una palingenesi ad una vita spirituale o divina.

Questi sono sogni, dirà il lettore equilibrato e pratico, sogni come quelli degli alchimisti, della quadratura del circolo e del moto perpetuo, incompatibili con la scienza moderna. La verità è che la scienza, moderna, scettica e modesta, non può dire nulla in proposito. La teoria della relatività ha dovuto abbandonare i vecchi concetti dello spazio e del tempo ed ammettere un continuo spazio tempo tetradimensionale, la tetractis della scienza moderna, ed ha dovuto ridurre i concetti di massa e di energia a niente altro che dei rapporti numerici. L'analisi fisico chimica ha, condotto alla disgregazione della molecola e dell'atomo sino ad ottenere, nella tecnica, lo sprigionamento

dell'energia atomica e, nella teoria, dei residui rapporti di numeri, interi, tornando dopo tanta fatica al punto di partenza dei pitagorici. Questa conoscenza raggiunta rende scettici ed insoddisfatti perché scardina l'antico senso di sicura conoscenza prima posseduto senza poterlo sostituire. Per esempio la frase: io bevo un bicchiere d'acqua, aveva una volta un senso preciso e soddisfacente, perché si credeva di intenderla appieno. La luce della scienza moderna ci toglie questa illusione. Infatti, cominciando dall'acqua, noi sappiamo che l'acqua non è affatto quel che ci sembra, ma è una delle forme di aggregazione di molecole composte alla loro volta di atomi di ossigeno e di idrogeno nella proporzione di uno a due legati tra loro elettricamente, e che questi atomi alla loro volta non sono niente altro che delle masse nucleari relativamente distanti ed intorno, a cui si muovono con grandissima velocità degli elettroni; ed in definitiva (per ora) l'acqua si riduce ad una specie di nebbia di corpuscoli in rapidissimo movimento ed a grande distanza mutua. Un altro nebbione si ha esaminando il bicchiere di vetro con la sola differenza che le molecole sono costituite da atomi di silicio e di alluminio in proporzioni numeriche semplici ben definite. Il nebbione bicchiere contiene il nebbione acqua, se non è poroso, in virtù della misteriosa legge di gravità. Un terzo nebbione è il nostro corpo, vera ridda di elettroni, di atomi, di molecole di corpi organici digerenti, tenute insieme dalla misteriosa forza vitale, nebbione vivente cui è collegato l'altro mistero vivente che si chiama l'io che parlando del corpo dice: io bevo. Come si vede, ed abbiamo saltato molte questioni, analizza analizza si finisce col non sapere più che cosa significa bere un bicchier d'acqua, mentre attenendosi alla semplice nozione sperimentale della vita, alle *données immédiates* dell'esperienza le parole: io, bere, bicchiere, acqua richiamano ciascuna alla mente nozioni note per precedenti esperienze, e tutta la frase acquista dalla loro connessione un senso chiaro e preciso. L'analisi della realtà concreta mostra il carattere immateriale della realtà della materia stessa, riducendo tutto a puri rapporti numerici, e facendo svanire il mito ingenuo della materia massiccia tangibile e resistente. Ma allora, se la realtà della materia si riduce alla realtà dei rapporti numerici, anche i rapporti tra cose ed esseri viventi hanno una realtà, sono realtà, e la percezione che se ne ha e le sensazioni che ci producono sono realtà, e la loro conoscenza è una conoscenza reale, primordiale ma sicura. Per quanto relativa e parziale, questa conoscenza è quella che conta. Si può spiegare ad un sordo le teorie dell'acustica ed insegnargli scientificamente che udire non è altro che percepire le vibrazioni la cui frequenza è compresa entro le 40.000 vibrazioni al minuto secondo, ma se è possibile dargli l'udito, fare funzionare il suo orecchio, egli acquisterà la conoscenza vitale dell'udito, la conoscenza diretta, immediata del suono, anche se non capirà nulla delle teorie scientifiche dell'acustica. Il metodo analitico obbiettivo ci ha condotto dal problema della costituzione della molecola al problema della costituzione dell'atomo, e da questo ci porterà chi sa dove; ma per ora, almeno la vita, la morte, la coscienza, la memoria ecc., restano misteri, e la scienza non è in grado e non ha nessun titolo per giudicare sogno e pazzia la speranza di rischiarare il mistero seguendo vie che essa non percorre.

La scienza moderna occidentale è una scienza sperimentale obbiettiva, ottenuta dall'esterno con strumenti in aiuto dei sensi; il suo scopo è osservare, capire, tenendo anche conto dell'inevitabile alterazione (Heisenberg) apportata nelle condizioni dell'esperienza dal suo intervento. In massoneria, in ermetismo, nel pitagoreismo ed in genere nell'esoterismo di tutti i tempi, l'osservatore è anche oggetto dell'esperienza, che viene considerata, dall'interno, direttamente, senza limitarne il campo a delle supposte colonne d'Ercole; si tratta più di sentire, di vivere, che di spiegare e teorizzare. Se il colombo possiede la facoltà dell'orientamento e la torpedine marina può dare la scossa elettrica, come è possibile escludere anche in base alla semplice teoria dell'eredità della specie ed alla filogenesi, che qualche uomo, se non tutti, possano giungere a possedere facoltà analoghe?

Migliaia di fenomeni mostrano che l'organismo umano è simile ad una stazione radio ricevente e trasmittente, se pure capace solo di funzionare sporadicamente e indipendentemente dalla volontà. La scienza moderna riconosce la genuinità di tali fenomeni, quando non può esimersene, li cataloga, li archivia, e tira avanti. L'esoterista dice: L'organismo umano gode di queste facoltà, educiamole ed usiamole e non facciamo come coloro che hanno orecchie e non sentono ed hanno occhi e non vedono. Occorre naturalmente volere ed osare, e non fare come quei bagnanti pusillanimi se pur vigorosi che si fermano tremebondi dinanzi al fondale di un metro forse aspettando che l'evoluzione della specie li trasformi in nuotatori. Un tuffo coraggioso, due bracciate, e si è bello e imparato a sostenersi nell'infido elemento.

Naturalmente la grande opera è impresa più ardua. Mettere il proprio naviglio per l'alto sale è assai più che un semplice tuffo dove non si tocca. Ma per cominciare, invece di aggrapparsi con tutte le forze all'ancora nel sicuro porto del corpo, occorre affrontare l'alto mare aperto, occorre non sentirsi nel corpo ma sentire il corpo entro di sé, accorgersi che si vive nel mar dell'essere e non siamo in terra (DANTE, *Inf.* 91) come quasi tutti credono, vivere *sub specie interioritatis* e non tenersi disperatamente a galla colle zucche per farsi sballottare dal flusso e riflusso della vita superflua e superficiale. Abbandonato il corpo e l'aiuola che ne fa tanto feroci, ascési i cieli, raggiunto l'empireo al di là della sfera del tempo, svincolato dalla nozione umana del tempo e dello spazio, il figlio dell'arte potrà in fine accingersi alla visione suprema e dire con Dante:

Nel suo profondo vidi che si interna.

Legato con amore in un volume

Ciò che per l'Universo si squaderna. (Par. XXXIII, 85-87).

Quello che si squaderna mediante la tetractis nell'universo si sprofonda con un processo inverso nella pura interiorità dell'essere. In queste condizioni di coscienza, tra le bianche stole del cielo quieto, la contemplazione della tetractis, del delta massonico, del delta sacro nel santuario del Dio cui Dante dedica l'ultima cantica consente la visione suprema, la intuizione sovrumana del cosmo, poichè

La contingenza, che fuor del quaderno

Della vostra matera non si stende

Tutta è dipinta nel cospetto eterno. (Par. XVII, 37-39).

L'altissimo poeta, il fedele d'Amore, il nostro concittadino Dante Alighieri si ispira manifestamente al concetto della tetractis o quaderno pitagorico, del delta luminoso massonico. Cittadino del cielo, cosmopolita nel vero senso della parola, egli si collega nella sua suprema visione al «nobilissimo filosofo Pitagora» (*Conv.* III, 41) facendo uso della stessa parola, dello stesso simbolo e dello stesso concetto.

Abbiamo così tracciato sulla tavola tripartita quanto ci è dato comprendere dei numeri sacri e della tetractis. Speriamo che possa contribuire a richiamare i fratelli sparsi sulla superficie della terra al nobile e secolare compito della fratellanza: Dare la luce a chi busca alla porta del tempio, e condurre gli eletti alla perfezione.

Τ Ε Λ Ο Σ