Weiterbildungskolleg der Stadt Minden
WESER-KOLLEG
Kolleg - Institut z. Erlangung d. Hochschulreife -,
Abendgymnasium, Abendrealschule
Sekundarstufen I und I I
Martinikirchhof 6a, 32423 Minden
Tel.: (05 71)38698061 - Fax: (0571)38698068
Email: info@weser-kolleg.net

Fachschaft ***MATHEMATIK***

Übungsmaterial

zur Vorbereitung auf den Einstufungstest

des Weser-Kollegs Minden, Bildungsgang Abendrealschule

MATHEMATIK

Stand 11/2016

Im Einstufungstest für das WESER-KOLLEG im Fach *MATHEMATIK* werden Grundkenntnisse aus folgenden Themenkreisen vorausgesetzt:

(1) ***Rechnen mit rationalen Zahlen (Bruchrechnung);***

(2) ***Lösen linearer Gleichungen;***

(3) ***Berechnung einfacher geometrischer Figuren;***

(4) ***Sachaufgaben zur Dreisatz-, Prozent- und Zinsrechnung.***

Die in diesem Skript vorgestellten Beispielaufgaben sollen helfen, vorhandene Grundkenntnisse zu diesen Themen wieder aufzufrischen. Die jeweils sich anschließenden Übungsaufgaben dienen der Festigung dieser Kenntnisse. Als weitere Hilfe sind im Anhang angefügt eine Zusammenstellung grundlegender

Rechenregeln und Formeln

sowie zur Kontrolle der Rechnungen eine Auflistung der

Ergebnisse der Übungsaufgaben.

Einige Aufgaben übertreffen dabei den Schwierigkeitsgrad der in der Prüfung gestellten Aufgaben.

(1) *Rechnen mit rationalen Zahlen (Bruchrechnung)*

Beispielaufgaben

B 1.1 $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3} - \frac{23}{10} = \frac{30}{60} + \frac{45}{60} - \frac{12}{60} + \frac{80}{60} - \frac{138}{60} = \frac{5}{60} = \mathbf{\frac{1}{12}}$

B 1.2 $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{3} - 2 = \frac{5}{3} - \frac{6}{3} = -\mathbf{\frac{1}{3}}$

B 1.3 $\left(6\,\frac{1}{20} - 10\,\frac{2}{5}\right) : 8\,\frac{7}{10} = \left(\frac{121}{20} - \frac{52}{5}\right) : \frac{87}{10} = \left(\frac{121}{20} - \frac{208}{20}\right) \cdot \frac{10}{87} = -\frac{87}{20} \cdot \frac{10}{87} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$

B 1.4 $\frac{51}{32} - \frac{1}{2} \cdot \left(5 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) : \frac{4}{3} = \frac{51}{32} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{4} + \frac{2}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{51}{32} - \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{4} \cdot \frac{3}{4}$

$= \frac{51}{32} - \frac{51}{32} = \mathbf{0}$

B 1.5 $\left(5\,\frac{1}{3} - 2\,\frac{1}{2}\right) : \left(2\,\frac{1}{2} + 1\,\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{16}{3} - \frac{5}{2}\right) : \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{4}\right)$

$= \left(\frac{32}{6} - \frac{15}{6}\right) : \left(\frac{10}{4} + \frac{7}{4}\right) = \frac{17}{6} : \frac{17}{4} = \frac{17}{6} \cdot \frac{4}{17} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \mathbf{\frac{2}{3}}$

B 1.6 $\dfrac{\left(2\,\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\right) : \frac{2}{3}}{\left(\frac{5}{8} - 3\,\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{3}} = \dfrac{\left(\frac{8}{3} + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{3}{2}}{\left(\frac{5}{8} - \frac{11}{3}\right) \cdot \frac{2}{3}} = \dfrac{\left(\frac{64}{24} + \frac{9}{24}\right) \cdot \frac{3}{2}}{\left(\frac{15}{24} - \frac{88}{24}\right) \cdot \frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{73}{24} \cdot \frac{3}{2}}{\left(-\frac{73}{24}\right) \cdot \frac{2}{3}} = -\dfrac{\frac{73}{16}}{\frac{73}{36}}$

$= -\frac{73}{16} \cdot \frac{36}{73} = -\frac{9}{4} = \mathbf{-\,2\,\frac{1}{4}}$

Übungsaufgaben

Anmerkung: ***Die nachfolgenden Aufgaben sollten ohne Taschenrechner gelöst werden!***

Ü 1.1 **a)** $2\frac{5}{12} - \frac{3}{8} - 2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$ **b)** $\left(5\frac{3}{7} - 3\frac{1}{2}\right) - \left(4\frac{3}{14} - 3\frac{4}{7}\right)$

Ü 1.2 **a)** $\frac{85}{27} \cdot \frac{36}{5} \cdot \frac{15}{34} \cdot \frac{13}{45} \cdot \frac{9}{26}$ **b)** $\left(\frac{3}{4} \cdot 1\frac{17}{18}\right) : \left(3\frac{3}{4} \cdot \frac{19}{29}\right) : \left(\frac{14}{9} \cdot 1\frac{10}{19}\right)$

Ü 1.3 **a)** $5 : \left(-2\frac{4}{5}\right) - 33 : \left(-2\frac{4}{5}\right)$ **b)** $-2\frac{1}{3} : \left(2\frac{1}{4} - 1\frac{2}{3}\right)$

Ü 1.4 **a)** $\frac{25}{6} - \left[\frac{15}{4} : \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\right)\right]$ **b)** $-\left(5 - \frac{4}{5} : \frac{1}{10}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot 5\right)$

Ü 1.5 **a)** $5 : \left(1\frac{1}{4} : 2\frac{1}{2}\right) + \left(2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}\right) : \frac{1}{4}$ **b)** $3 - 3 \cdot \left[2 \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{9} : \left(-\frac{1}{6}\right)\right]$

Ü 1.6 **a)** $\dfrac{(-4) : 5 - 1\frac{1}{2}}{1 - 1\frac{1}{10}}$ **b)** $\dfrac{4 - \frac{1}{2} \cdot \left(-4 + \frac{3}{4}\right)}{-5\frac{5}{8}}$

Ü 1.7 **a)** $\left(\frac{4}{3} - \frac{10}{7}\right) \cdot \left(3\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3} + \frac{17}{6}\right)$ **b)** $\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{14}\right) : \left(2\frac{2}{7} + 1\frac{5}{8} - 3\frac{15}{28}\right)$

Ü 1.8 **a)** $\dfrac{\left(5\frac{1}{5} + 3\frac{3}{10}\right) \cdot 3\frac{2}{5}}{10\frac{1}{5} \cdot \left(7\frac{1}{6} - 5\frac{3}{4}\right)}$ **b)** $\dfrac{\frac{22}{3} : \frac{55}{6} - \frac{8}{5} + 8\frac{4}{5} : 3\frac{2}{3}}{-7\frac{1}{3} : \left(5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}\right)}$

(2) *Lösen linearer Gleichungen*

Beispielaufgaben

B 2.1 $\frac{1}{5}\left(10x + 15\right) = \frac{1}{4}\left(4x + 16\right)$ | *Klammer auflösen*

$\Leftrightarrow \quad 2x + 3 = x + 4$ | $-x - 3$

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x = 1}$

B 2.2 $\frac{5}{6}x + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}x - 1 + \frac{1}{3}x$ | $\cdot 30$

$\Leftrightarrow \quad 25x + 9 = 12x - 30 + 10x$ | *zusammenfassen*

$\Leftrightarrow \quad 25x + 9 = 22x - 30$ | $-9 - 22x$

$\Leftrightarrow \quad 3x = -39$ | $: 3$

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x = -13}$

B 2.3 $46 - \left[3\left(7 - 2x\right) - 5\left(7x + 22\right)\right] = 4\left[2x - \left(2x - 3\right)\right]$ | *Klammer auflösen*

$\Leftrightarrow \quad 46 - \left[21 - 6x - 35x - 110\right] = 4\left[2x - 2x + 3\right]$ | *zusammenfassen*

$\Leftrightarrow \quad 46 - \left[-41x - 89\right] = 4 \cdot 3$ | *Klammer auflösen*

$\Leftrightarrow \quad 46 + 41x + 89 = 12$ | *zusammenfassen*

$\Leftrightarrow \quad 41x + 135 = 12$ | -135

$\Leftrightarrow \quad 41x = -123$ | $: 41$

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x = -3}$

B 2.4 $5x - 6\left(x - 5\right) - \frac{1}{2}\left(x + 2\right) - 4\left(\frac{1}{2}x - 3\right) + 1 = 0$ | *Klammer auflösen*

$\Leftrightarrow \quad 5x - 6x + 30 - \frac{1}{2}x - 1 - 2x + 12 + 1 = 0$ | *zusammenfassen*

$\Leftrightarrow \quad -\frac{7}{2}x + 42 = 0$ | -42

$\Leftrightarrow \quad -\frac{7}{2}x = -42$ | $:\left(-\frac{7}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x = 12}$

B 2.5 $\frac{2(x-1)}{3} - \frac{3(x-2)}{4} = \frac{4(x-3)}{5} - \frac{5(x-4)}{6}$ | $\cdot 60$

$\Leftrightarrow$ $40(x-1) - 45(x-2) = 48(x-3) - 50(x-4)$ | *Klammern auflösen*

$\Leftrightarrow$ $40x - 40 - 45x + 90 = 48x - 144 - 50x + 200$ | *zusammenfassen*

$\Leftrightarrow$ $-5x + 50 = -2x + 56$ | $-50 + 2x$

$\Leftrightarrow$ $-3x = 6$ | $:(-3)$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{x = -2}$

B 2.6 $(2x+1)\cdot(x-1) + 14 = -(x-3)\cdot(3-2x)$ | *Klammern auflösen*

$\Leftrightarrow$ $2x^2 - 2x + x - 1 + 14 = -(3x - 2x^2 - 9 + 6x)$ | *Klammern auflösen*

$\Leftrightarrow$ $2x^2 - 2x + x - 1 + 14 = -3x + 2x^2 + 9 - 6x$ | *zusammenfassen*

$\Leftrightarrow$ $2x^2 - x + 13 = 2x^2 - 9x + 9$ | $-2x^2 - 13 + 9x$

$\Leftrightarrow$ $8x = -4$ | $:8$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{x = -\frac{1}{2}}$

B 2.7 $2(x-1)^2 - (x+1)^2 = (x-7)^2$ | *Klammern auflösen*

$\Leftrightarrow$ $2(x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1) = x^2 - 14x + 49$ | *Klammern auflösen*

$\Leftrightarrow$ $2x^2 - 4x + 2 - x^2 - 2x - 1 = x^2 - 14x + 49$ | *zusammenfassen*

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 6x + 1 = x^2 - 14x + 49$ | $-x^2 - 1 + 14x$

$\Leftrightarrow$ $8x = 48$ | $:8$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{x = 6}$

B 2.8 $(x-2)^2 - (x-4)(x+4) - 5(1-x^2) = 5x(x-0{,}5)$ | *Klammern auflösen*

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x + 4 - (x^2 - 16) - 5 + 5x^2 = 5x^2 - 0{,}5x$ | *Klammern auflösen*

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x + 4 - x^2 + 16 - 5 + 5x^2 = 5x^2 - 2{,}5x$ | *zusammenfassen*

$\Leftrightarrow$ $5x^2 - 4x + 15 = 5x^2 - 2{,}5x$ | $-5x^2 - 15 + 2{,}5x$

$\Leftrightarrow$ $-1{,}5x = -15$ | $:(-1{,}5)$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{x = 10}$

Übungsaufgaben

Ü 2.1 **a)** $38x - [19 - (16 - 4x) - 7x] = 41 - (18x - 15)$

b) $300x - [(219x + 205) - (420 + 57x)] = [145 + 112x - (125x - 189)] + 134x$

Ü 2.2 **a)** $\frac{3}{4}x + \frac{3}{5} = \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{10}x$

b) $\frac{3(x-1)}{4} - \frac{4(x-2)}{5} = \frac{5(x-3)}{6} - \frac{7(x-4)}{8}$

Ü 2.3 **a)** $3x - 5(-x + 1) = -11 + 5(-3x - 8)$

b) $15(2x - 16) - 6(x + 14) = 4(18 - 5x) - 12(3x - 7)$

Ü 2.4 **a)** $(x + 2)(x + 1) = (x - 2)(x + 9)$

b) $(3x - 12)(1 - 2x) = (6x + 1)(8 - x)$

Ü 2.5 **a)** $(2x - 3)(10x + 9) - (5x - 16)(4x + 7) = 0$

b) $\left(\frac{2}{3}x - 2\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{6}x - \frac{3}{4}\right)(2x - 9) = -4$

Ü 2.6 **a)** $4(x + 3)(x - 1) + 20 = (2x - 1)(5x + 1) - (3x - 5)(2x + 1)$

b) $(1{,}5x - 1)(0{,}4x + 1) = 0{,}5x(0{,}4x - 2{,}8) + 4(0{,}5x - 0{,}5)(0{,}2x + 2{,}4)$

Ü 2.7 **a)** $(5x + 4)(5x - 4) - (3 - 3x)^2 - (2x - 8)(8x - 2) + 41 = 0$

b) $(x + 14)^2 + (3x - 6)(6 + 3x) = (46 + 7x)(2x - 1) - (7 - 2x)^2$

Ü 2.8 **a)** $2(3x + 8)^2 - 3(2x - 7)(2x + 7) = (100 + x)(2x - 1) + (13 - 2x)^2 + 2$

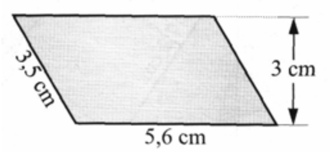
b) $7(9 + 2x)^2 + 2(4x - 7)^2 = 3(5x + 6)(5x - 6) - 5x(3x - 11) + 8$

(3) *Berechnung einfacher geometrischer Figuren*

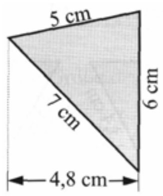
Beispielaufgaben

B 3.1 Berechne jeweils den Flächeninhalt A und den Umfang u der folgenden Figuren!

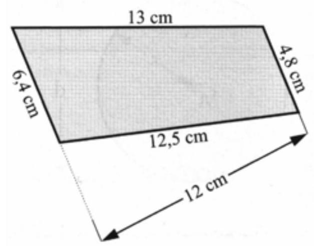
a)



b)



c)



Lösung:

a) Für den Flächeninhalt eines Parallelogramms gilt $A = g \cdot h$; für den Umfang $u = 2\left(a + b\right)$.

$g = 5{,}6\text{ cm};\ h = 3\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad A = 5{,}6\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = \mathbf{16{,}8\ cm^2}$;

$a = 5{,}6\text{ cm};\ b = 3{,}5\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad u = 2\left(5{,}6\text{ cm} + 3{,}5\text{ cm}\right) = 2 \cdot 9{,}1\text{ cm} = \mathbf{18{,}2\ cm}$

b) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ergibt sich als $A = \frac{1}{2}\ g \cdot h$; der Umfang als $u = a + b + c$.

$g = 6\text{ cm};\ h = 4{,}8\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot 6\text{ cm} \cdot 4{,}8\text{ cm} = \mathbf{14{,}4\ cm^2}$;

$a = 6\text{ cm};\ b = 5\text{ cm};\ c = 7\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad u = 6\text{ cm} + 5\text{ cm} + 7\text{ cm} = \mathbf{18\ \ cm}$

c) Der Flächeninhalt eines Trapezes beträgt $A = \frac{1}{2}\ \left(a + c\right) \cdot h$; der Umfang $u = a + b + c + d$.

$a = 6{,}4\text{ cm};\ c = 4{,}8\text{ cm};\ h = 12\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\ \left(6{,}4\text{ cm} + 4{,}8\text{ cm}\right) \cdot 12\text{ cm} = \mathbf{67{,}2\ cm^2}$;

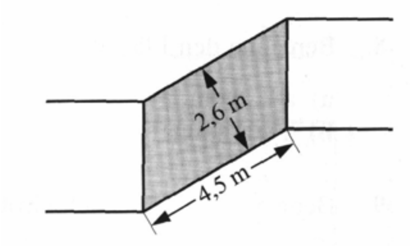
$a = 6{,}4\text{ cm};\ b = 12{,}5\text{ cm};\ c = 4{,}8\text{ cm};\ d = 13\text{ cm} \Rightarrow u = 6{,}4\text{ cm} + 12{,}5\text{ cm} + 4{,}8\text{ cm} + 13\text{ cm} = \mathbf{36{,}7\ cm}$

B 3.2 Eine rechteckige Garageneinfahrt ist 12 m breit und 5 m lang; sie soll mit Platten belegt werden. Eine Platte ist 0,5 m breit und 0,5 m lang. Wie viele Platten werden benötigt?

Lösung:

Die Garageneinfahrt hat als Rechteck eine Fläche von $12\text{ m} \cdot 5\text{ m} = 60\text{ m}^2$. Da die Fläche einer jeden einzelnen Platte $0{,}5\text{ m} \cdot 0{,}5\text{ m} = 0{,}25\text{ m}^2$ beträgt, errechnet sich daraus eine notwendige Gesamtzahl von $60\text{ m}^2 : 0{,}25\text{ m}^2 =$ **240 Platten**.

B 3.3 Im Bild rechts sieht man eine Treppenhausschräge. Die graue Fläche soll getäfelt werden.



a) Berechne die Größe der Wandfläche.

b) Der Tischler berechnet für das Täfeln 66,25 € pro m^2. Berechne die Kosten.

Lösung:

a) Die Schräge ist ein Parallelogramm mit Grundseite $g = 4{,}5\text{ m}$ und Höhe $h = 2{,}6\text{ m}$ und hat daher eine Fläche von $4{,}5\text{ m} \cdot 2{,}6\text{m} = \mathbf{11{,}7\ m^2}$.

b) Bei Kosten von 66,25 € pro m^2 ergibt sich für das Täfeln der Schräge ein Gesamtbetrag in Höhe von $11{,}7\text{ m}^2 \cdot 66{,}25\text{ €}/\text{m}^2 \approx$ **775,13 €**.

B 3.4 Ein Schwimmbecken ist 50 m lang, 12 m breit und 2 m tief.

a) Was kostet das Neuverfliesen dieses Beckens, wenn in der Kalkulation Material- und Arbeitskosten insgesamt mit 48 € pro m^2 angesetzt werden?

b) Wie teuer ist die Füllung des Beckens, wenn ein Kubikmeter Wasser 1,80 € kostet?

Lösung:

a) Die Grundfläche des Schwimmbeckens beträgt $50\text{ m} \cdot 12\text{ m} = 600\text{ m}^2$; die Seitenwände des Beckens haben eine Fläche von $2 \cdot (50\text{ m} \cdot 2\text{ m} + 12\text{ m} \cdot 2\text{ m}) = 248\text{ m}^2$. Somit ergibt sich eine zu verfliesende Gesamtfläche von $600\text{ m}^2 + 248\text{ m}^2 = 848\text{ m}^2$.

Die Kosten für das Neuverfliesen des Beckens belaufen sich also auf $848 \cdot 48\text{ €} =$ **40.704 €**.

b) Das Fassungsvermögen des Beckens beträgt $50\text{ m} \cdot 12\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 1.200\text{ m}^3$; somit kostet eine Füllung des Schwimmbeckens $1.200 \cdot 1{,}80\text{ €} =$ **2.160 €**.

B 3.5 Eine zylindrische Tonne mit einem inneren Durchmesser von 65 cm ist 90 cm hoch.

a) Wie viel Liter Wasser fasst die Tonne?

b) Wie hoch stehen 200 Liter Wasser in der Tonne?

Lösung:

a) Das Volumen eines Zylinders berechnet sich als $V = \pi\ r^2 \cdot h$.

$r = \frac{d}{2} = 32{,}5\text{ cm};\ h = 90\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad V = \pi \cdot 1.056{,}25\text{ cm}^2 \cdot 90\text{ cm} \approx 298.647{,}65\text{ cm}^3$

Da 1 Liter umgerechnet 1000 cm^3 entspricht, fasst die Tonne somit ca. **298, 65 l**.

b) Aus der Volumenformel $V = \pi\, r^2 \cdot h$ folgt durch Umformung: $h = \frac{V}{\pi\, r^2}$.

Mit $r = 32{,}5$ cm und $V = 200\,l = 200.000\ cm^3$ ergibt sich somit für die Höhe des Wasserstandes in der Tonne: $h = \frac{200.000\ cm^3}{\pi \cdot 1.056{,}25\ cm^2} \approx \mathbf{60{,}27\ cm}$.

B 3.6 Berechne das Volumen V und die Mantelfläche M einer quadratischen Pyramide mit Grundkante $a = 6$ m und Höhe $h = 11$ m!

Lösung:

Für das Volumen einer quadratischen Pyramide gilt: $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$.

$a = 6\ m;\ h = 11\ m \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} \cdot 36\ m^2 \cdot 11\ m = \mathbf{132\ m^3}$

Die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide ergibt sich als $M = 2\,a \cdot h_s$ mit $h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

$\Rightarrow \quad M = 2\,a \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 12\ m \cdot \sqrt{130\ m^2} \approx \mathbf{136{,}82\ m^2}$

B 3.7 Ein Trichter mit einem oberen Durchmesser von 20 cm soll (ohne Ansatzrohr) ein Fassungsvermögen von 1 Liter haben. Wie hoch muss dieser Trichter sein?

Lösung:

Der Trichter hat die Form eines Kegels. Dessen Volumen berechnet sich als $V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2 \cdot h$.

Durch Umformung ergibt sich daraus: $h = \frac{3 \cdot V}{\pi\, r^2}$. Bei den vorgegebenen Maßen $r = 10$ cm und $V = 1000\ cm^3$ folgt somit für die Höhe des Trichters: $h = \frac{3000\ cm^3}{\pi \cdot 100\ cm^2} \approx \mathbf{9{,}55\ cm}$.

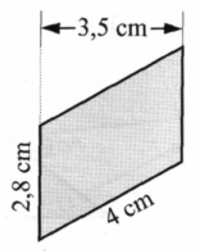
Übungsaufgaben

Ü 3.1 Berechne jeweils die fehlenden Größen des Rechtecks!

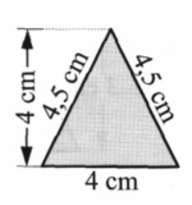
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
a	6 cm	4,2 m			4 cm		
b			11 mm	2,9 cm		7,8 m	
A	24 cm^2	9,66 m^2	66 mm^2	17,98 cm^2			15 mm^2
u					32 cm	36,4 m	16 mm

Ü 3.2 Berechne jeweils den Flächeninhalt A und den Umfang u der folgenden Figuren!

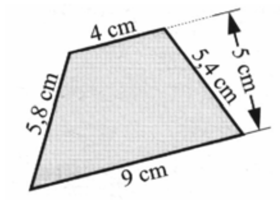
a)



b)



c)

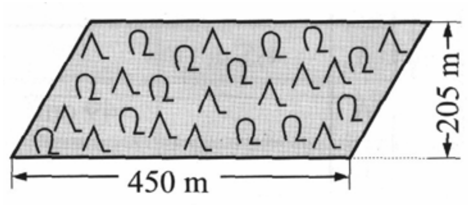


Ü 3.3 Ein 3,65 m breites und 4,70 m langes Zimmer soll mit Teppichboden ausgelegt werden, der pro m^2 35,80 € kostet. Berechne die Materialkosten!

Ü 3.4 Die im Bild rechts dargestellte Waldfläche soll neu aufgeforstet werden.

c) Wie groß ist die aufzuforstende Fläche?

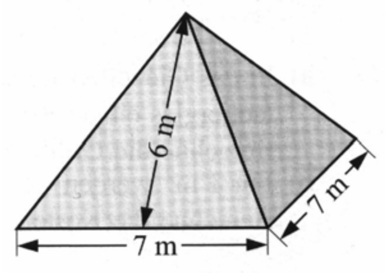
d) Die Aufforstung mit Mischwald kostet 6.000 € pro ha ($= 10.000\ m^2$). Berechne die Kosten!



Ü 3.5 Das in der Skizze abgebildete Turmdach soll neu mit Naturschiefer eingedeckt werden.

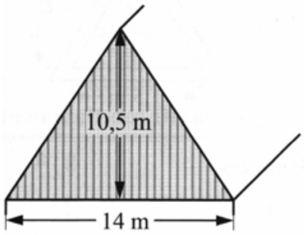
a) Berechne die Größe der Dachfläche!

b) Wie teuer wird das Decken des Daches werden, wenn man von 80 € pro m^2 ausgeht?

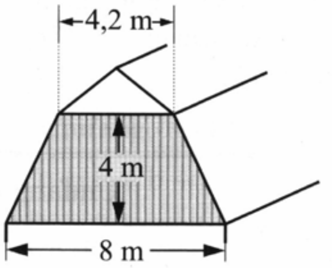


Ü 3.6 Die abgebildeten Giebelflächen sollen mit Holz verschalt werden. Pro m^2 sind dabei 96,50 € zu veranschlagen. Berechne jeweils die sich ergebenden Kosten!

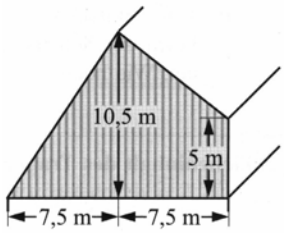
a)



b)



c)



Ü 3.7 Ein Makler bietet ein 19 m langes, 11 m breites und 5,5 m hohes Ferienhaus mit Flachdach zu einem Preis von 310 € pro Kubikmeter umbautem Raum an. Was ist letztlich für dieses Haus zu zahlen?

Ü 3.8 Ein zylindrischer Gasbehälter soll einen Durchmesser von 22 m haben und 6.000 m^3 Gas fassen. Wie hoch muss der Behälter sein?

Ü 3.9 Eine Litfaßsäule hat einen Umfang von 3,50 m und eine Höhe von 2,90 m. Ein Sockel von 30 cm soll nicht beklebt werden. Berechne die Größe der verbleibenden Werbefläche.

Ü 3.10 Wie schwer ist ein Rundstahl mit einem Durchmesser von 15 cm und einer Länge von 4,25 m, wenn 1 cm^3 Stahl 7,85 g wiegt?

Ü 3.11 Berechne Volumen, Ober- und Mantelfläche einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide mit Grundkante $a = 4\,m$ und Höhe $h = 5\,m$!

Ü 3.12 Von den Größen Radius r, Körperhöhe h, Länge s der Mantellinie, Mantelfläche M, Oberfläche O und Volumen V eines Kegels sind zwei gegeben. Berechne jeweils die fehlenden Größen!

a) $r = 2\text{ cm}$	**b)** $s = 8\text{ cm}$	**c)** $s = 7\text{ dm}$	**d)** $h = 14\text{ cm}$	**e)** $M = 3{,}5\text{ m}^2$
$h = 3\text{ cm}$	$r = 6\text{ cm}$	$M = 1\text{ m}^2$	$V = 2{,}5\ l$	$O = 4{,}5\text{m}^2$

(4) *Sachaufgaben zur Dreisatz-, Prozent- und Zinsrechnung*

Beispielaufgaben

B 4.1 In einer Autofabrik werden bestimmte Einbauteile durch Automaten hergestellt. Ein Automat stellt in 28 Minuten 336 Teilstücke her. Wie viele Stücke fertigt dieser Automat in 7,5 Stunden an?

Lösung:

proportionale Zuordnung:

28 Minuten — 336 Teilstücke

450 Minuten (= 7,5 Stunden) — x Teilstücke $\Rightarrow$ $x = \frac{336 \cdot 450}{28} = 5..400$

In 7,5 Stunden fertigt der Automat somit **5.400 Teilstücke**.

B 4.2 In einem Neubaugebiet wurden 36 Bauplätze mit einer Größe von je 720 m^2 erschlossen. Wie viele gleichgroße Bauplätze würde dieses Baugebiet haben, wenn jeder Bauplatz 864 m^2 groß wäre?

Lösung:

antiproportionale Zuordnung:

720 m^2 — 36 Bauplätze

864 m^2 — x Bauplätze $\Rightarrow$ $x = \frac{36 \cdot 720}{864} = 30$

Bei einer Grundstücksgröße von 864 m^2 würde das Neubaugebiet also **30 Bauplätze** umfassen.

B 4.3 In einem Feriencamp zahlt eine Gruppe von 18 Schülern für 5 Tage 1.125 €. Welchen Betrag müsste die Gruppe bezahlen, wenn 3 Schüler von der Teilnahme an der Fahrt zurücktreten und die übrigen Teilnehmer den Aufenthalt um einen Tag verlängern wollten?

Lösung:

proportionale Zuordnung:

18 Schüler — 5 Tage — 1.125 €

15 Schüler — 6 Tage — x € $\Rightarrow$ $x = \frac{1.125 \cdot 15 \cdot 6}{5 \cdot 18} = 1.125$

Bei einer Teilnehmerzahl von 15 Schülern müsste die Gruppe für einen Aufenthalt von 6 Tagen also ebenfalls **1.125 €**. zahlen.

B 4.4 Ein Deich sollte laut Plan durch 12 Arbeiter in 19 Tagen repariert werden. Um wie viele Tage verzögern sich die Reparaturarbeiten, wenn nach vier Tagen 2 der Arbeiter durch Krankheit ausfallen?

Lösung:

antiproportionale Zuordnung:

12 Arbeiter — 15 Tage

10 Arbeiter — x Tage $\Rightarrow$ $x = \frac{15 \cdot 12}{10} = 18$

Die Reparaturarbeiten verzögern sich somit um **3 Tage**.

B 4.5 Nach einem Sehtest für Führerschein-Bewerber mussten sich 7,5% einer augenärztlichen Untersuchung unterziehen. Das waren 11.625 Personen. Von diesen erklärten die Augenärzte 8% für untüchtig zum Lenken eines Autos.

a) Wie viele Personen waren an dem Sehtest beteiligt?

b) Wie viele Personen wurden aufgrund der augenärztlichen Untersuchung als fahruntüchtig eingestuft?

c) Wie viel % der am Test beteiligten Personen bekamen letztlich wegen mangelnder Sehfähigkeit nicht den Führerschein?

Lösung:

a) Gesucht ist der Grundwert G. Bei dem gegebenem Prozentwert $P = 11.625$ und dem Prozentsatz $p\,\% = 7{,}5\,\%$ ergibt sich: $G = P \cdot \frac{100}{p} = 11.625 \cdot \frac{100}{7{,}5} = 155.000.$

An dem Sehtest waren also **155.000 Personen** beteiligt..

b) Gefragt ist hier nach dem Prozentwert P bei vorgegebenem Grundwert $G = 11.625$ und einem Prozentsatz von $p\,\% = 8\,\%$. Man erhält somit $P = G \cdot \frac{p}{100} = 11.625 \cdot \frac{8}{100} = 930.$

930 der augenärztlich untersuchten Personen waren demnach fahruntüchtig.

c) Zu ermitteln ist der Prozentsatz p bei gegebenem Grundwert $G = 155.000$ und dem Prozentwert $P = 930$. Man erhält also: $p = P \cdot \frac{100}{G} = 930 \cdot \frac{100}{155.000} = 0{,}6.$

Der Anteil der Führerscheinbewerber, denen wegen Sehuntüchtigkeit nicht die Fahrerlaubnis erteilt wurde, betrug demnach **0,6%.**

B 4.6 Der Einzelpreis einer Ware wurde vor zwei Monaten um 10% gesenkt und nun wieder um 10% erhöht. Jetzt kostet diese Ware 321,75 €. Was kostete sie vor der Preissenkung?

Lösung:

Bezeichnet man den ursprünglichen Preis mit x, den zwischenzeitlichen Preis mit y, dann gilt:

$$y = x - \frac{1}{10}x = \frac{9}{10}x \quad \text{und} \quad 321{,}75 = y + \frac{1}{10}y = \frac{11}{10}y.$$

Durch Einsetzen erhält man: $321{,}75 = \frac{11}{10} \cdot \frac{9}{10}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{321{,}75 \cdot 10 \cdot 10}{9 \cdot 11} = 325.$

Vor der Preissenkung kostete die Ware somit **325 €.**

B 4.7 Für einen Kredit in Höhe von 300.000 € muss ein Unternehmer nach einem Jahr 25.500 € Zinsen zahlen. Berechne den Zinssatz!

Lösung:

Aus den vorgegebenen Größen $K = 300.000$ und $Z = 25.500$ ergibt sich für den Zinssatz

$$p = Z \cdot \frac{100}{K} = 25.500 \cdot \frac{100}{300.000} = 8{,}5.$$

Der zu berechnende Zinssatz beträgt also **8,5 %..**

B 4.8 Die Einlagen eines Sparkontos werden mit 4,5% verzinst. Am Ende des Jahres beträgt der Kontostand einschließlich Zinsen 689,70 €. Wie viel Zinsen sind gezahlt worden, wenn im Laufe des gesamten Jahres keine Kontobewegungen stattgefunden haben?

Lösung:

Die Aufgabe lässt sich mit Hilfe eines *Dreisatzansatzes* lösen:

104,5 % — 689,70 €

100 % — x € $\Rightarrow \quad x = \frac{689{,}70 \cdot 100}{104{,}5} = 660$

Demnach belaufen sich die für das Jahr gezahlten Zinsen auf 689,70 € - 660 € = **29,70 €**.

Übungsaufgaben

Ü 4.1 Zum Streichen einer 10 m^2 großen Wandfläche benötigt man 3 kg Farbe. Wie viel kg Farbe benötigt man für eine 45 m^2 große Wand?

Ü 4.2 Die Lebensmittelvorräte im Basislager einer Expedition reichen bei 16 Mitgliedern 18 Tage. Wie lange reichen dieselben Vorräte bei 12 Mitgliedern?

Ü 4.3 Drei Lastwagen fahren den Erdaushub eines Baugeländes ab.

a) Jeder Wagen muss 36mal fahren. Wie oft müsste jeder fahren, wenn vier Lastwagen eingesetzt würden?

b) Wie viele Wagen müssten zur Verfügung stehen, damit jeder nur 12mal fahren müsste?

Ü 4.4 Ein senkrecht gestellter Stab von 80 cm Länge wirft einen Schatten von 32 cm. Wie hoch ist ein daneben stehender Kirchturm, der eine Schattenlänge von 22 m hat?

Ü 4.5 Eine Firma produzierte mit 13 Maschinen in den ersten 7 Monaten eines Jahres 846 Stück einer Ware. Mit welcher Produktion ist für den Rest des Jahres zu rechnen, wenn 4 der Maschinen zu anderen Zwecken eingesetzt werden?

Ü 4.6 Bei sparsamer Fahrweise (Tempo 100 km/h, Verbrauch 6,4 l pro 100 km) reicht der Tankinhalt eines Autos für 690 km. Bei rasanter Fahrweise steigt der Verbrauch auf 10 l pro 100 km. Wie weit kommt man nun?

Ü 4.7 Der Lebensmittelvorrat eines Kreuzfahrtschiffes reicht für die 120 Personen 18 Tage. Nach 6 Tagen werden 24 Personen zusätzlich an Bord genommen. Wie lange reicht der Vorrat insgesamt?

Ü 4.8 Eine 135 km lange Autobahn wird gebaut; davon sind 81 km fertig. Wie viel Prozent der Gesamtlänge sind das?

Ü 4.9 Ein Kaufhaus senkt beim Räumungsverkauf alle Preise um 12%. Ein Hemd kostet dann 43,80 €. Wie viel € hat das Hemd ursprünglich gekostet?

Ü 4.10 In einem Einfamilienhaus wurden in einem Jahr 7.643 m^3 Gas verbraucht. Das sind 6% weniger als im Vorjahr. Wie viel m^3 Gas wurden im Vorjahr verbraucht?

Ü 4.11 Der Wert eines Hauses erhöht sich durch Renovierung von 185.000 € auf 202.000 €. Wie viel % beträgt die Wertsteigerung?

Ü 4.12. Eine Rechnung beläuft sich auf 347,60 € + 16% MWSt. Bei Barzahlung gibt es 2% Skonto. Wie viel muss man letztlich bezahlen?

Ü 4.13 Ein gebrauchtes Auto wird zum Preis von 5.400 € verkauft, was gerade die Hälfte des ursprünglichen Kaufpreises ist. Inzwischen hat sich der Neupreis des Wagens um 20% erhöht. Zu wie viel Prozent des neuen Preises wurde der Wagen verkauft?

Ü 4.14 Wenn 8% Rabatt 56 € ausmachen, wie teuer war dann die Ware?

Ü 4.15 Ein Kapital von 7.200 € wird zu einem Zinssatz von 7% verliehen. Berechne die Zinsen für

a) 1 Jahr **b)** $\frac{3}{4}$ Jahr **c)** 7 Monate **d)** 42 Tage!

Ü 4.16 Bei welchem Zinssatz bringen

a) 600 € in 7 Monaten 14 € Zinsen **b)** 400 € in 2 Monaten 4 € Zinsen?
c) 900 € in 40 Tagen 5 € Zinsen? **d)** 800 € in 21 Tagen 1,40 € Zinsen?

Ü 4.17 Welches Kapital bringt bei

a) 4%iger Verzinsung in 3 Monaten 15 € Zinsen?
b) 5%iger Verzinsung in 2 Monaten 30 € Zinsen?
c) 4,5%iger Verzinsung in 4 Monaten 75 € Zinsen?

Ü 4.18 Bestimme die Dauer der Verzinsung!

a)	Kapital: 7.500 €;	Zinssatz: 5%;	Zinszahlung: 125 €
b)	Kapital: 1.800 €;	Zinssatz: 4%;	Zinszahlung: 36 €
c)	Kapital: 6.900 €;	Zinssatz: 8%;	Zinszahlung: 414 €

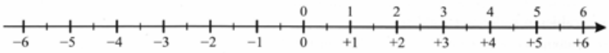
Ü 4.19 Jemand kauft eine 2-Zimmer-Eigentumswohnung von 50 m^2 zu 90.000 €. Sein Eigenkapital beträgt 30%. Zur Finanzierung des Restbetrages nimmt er ein Darlehen auf, für das er 7% Zinsen und 1% Tilgung bezahlt. Er vermietet die Wohnung zum Preis von 400 € monatlich zuzüglich aller Nebenkosten. Trägt die Miete die Finanzierungskosten?

Ü 4.20 Herr Schulze leiht am 10. Juli bei seiner Bank 8.000 € und am 20. September nochmals 4.500 €. Er zahlt seine Schulden am 15. Dezember zurück. Wie viel muss er bei einem Zinssatz von 8,5% bezahlen?

Anhang A: Rechenregeln und Formeln

Rechnen mit rationalen Zahlen

Zahlengerade – Anordnung der rationalen Zahlen



Auf der Zahlengeraden liegt die kleinere von zwei Zahlen stets links.

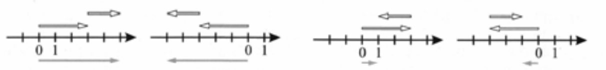
Beispiele: $-4 < +1$; $-6 < -2$; $-2{,}5 < 0$; $0 < +1\frac{1}{2}$

Zahl und Gegenzahl liegen auf der Zahlengeraden symmetrisch zu 0.

Beispiele: *-3 ist Gegenzahl zu $+3$; $+3$ ist Gegenzahl zu -3*
$+5$ ist Gegenzahl zu -5; -5 ist Gegenzahl zu $+5$

Addieren rationaler Zahlen

(1) Summanden mit gleichen Vorzeichen. *(2) Summanden mit verschiedenen Vorzeichen.*



$(+3) + (+2) = +5$ $(-3) + (-2) = -5$ $(+3) + (-2) = +1$ $(-3) + (+2) = -1$

(1) Man addiert die Beträge. Das Ergebnis hat das gemeinsame Vorzeichen.

(2) Man subtrahiert vom größeren Betrag den kleineren. Das Ergebnis hat das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag.

Subtrahieren rationaler Zahlen

Man subtrahiert eine rationale Zahl, indem man ihre Gegenzahl addiert.

Beispiele: $(+5) - (+9) = (+5) + (-9) = -4$; $(+5) - (-9) = (+5) + (+9) = +14$

Verkürzte Schreibweise: Bei einer positiven Zahl darf man Vorzeichen und Klammer weglassen. Bei einer negativen Zahl darf man die Klammer nur weglassen, wenn diese Zahl am Anfang steht.

Beispiele: $(-5) + (+8) = -5 + 8$; $(-5) + (-8) = (-5) - (+8) = -5 - 8$

Multiplizieren rationaler Zahlen

(1) Beide Faktoren haben gleiche Vorzeichen.

$(+3) \cdot (+2) = +6$; $(-3) \cdot (-2) = +6$

Man multipliziert die Beträge.
Das Ergebnis hat das Vorzeichen $+$.
Plus mal plus ergibt plus.
Minus mal minus ergibt plus.

(2) Beide Faktoren haben verschiedene Vorzeichen.

$(+3) \cdot (-2) = -6$; $(-3) \cdot (+2) = -6$

Man multipliziert die Beträge.
Das Ergebnis hat das Vorzeichen $-$.
Plus mal minus ergibt minus.
Minus mal plus ergibt minus.

Dividieren rationaler Zahlen

Man dividiert zwei rationale Zahlen, indem man die Beträge dividiert und dann das Vorzeichen wie bei der Multiplikation bestimmt.

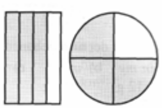
Beachte bei Brüchen: Durch eine rationale Zahl wird dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

Beispiele: $(-21) : (-7) = +3$; $(-3{,}5) : 7 = -0{,}5$; $\frac{5}{8} : (-\frac{2}{3}) = \frac{5}{8} \cdot (-\frac{3}{2}) = -\frac{15}{16}$

Bruchzahlen

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{100}, \frac{7}{100}$ sind **gewöhnliche Brüche.**

Der Nenner des Bruches (rechts dargestellt: $\frac{3}{4}$ gibt an, in wie viele gleich große Teile (hier: 4) das Ganze (hier: ein Rechteck, ein Kreis) zerlegt wird.
Der Zähler (hier: 3) gibt an, wie viele solche Teile dann genommen werden.



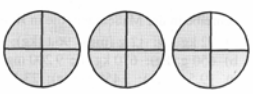
$\frac{3}{4}$

Gemischte Schreibweise

$2\frac{3}{4}$ bedeutet $2 + \frac{3}{4}$.

Beispiele: $2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

$\frac{13}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$



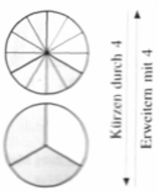
Kürzen und Erweitern

Ein Bruch wird *gekürzt*, indem man *Zähler und Nenner* durch dieselbe natürliche Zahl *dividiert.*

Beispiel: $\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$

Ein Bruch wird *erweitert*, indem man *Zähler und Nenner* mit derselben natürlichen Zahl *multipliziert.*

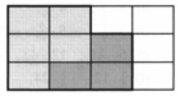
Beispiel: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$



Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.
Ungleichnamige Brüche werden zunächst gleichnamig gemacht.

Beispiele: $\frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12}$; $\frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$; $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12}$

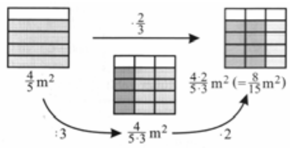


Multiplizieren von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Beispiele: $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$

$\frac{5}{18} \cdot \frac{12}{25} = \frac{{}^{1}\cancel{5} \cdot \cancel{12}^{2}}{{}_{3}\cancel{18} \cdot \cancel{25}_{5}} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$

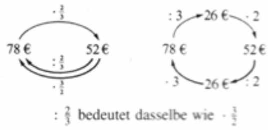


Dividieren von Brüchen

Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert.

Beispiel:

$\frac{2}{5} : \frac{3}{10} = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{2 \cdot \cancel{10}^{2}}{{}_{1}\cancel{5} \cdot 3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$



$: \frac{2}{3}$ bedeutet dasselbe wie $\cdot \frac{3}{2}$

Man kann jeden Quotienten als Bruch schreiben und umgekehrt. Ein Bruchstrich wirkt wie Klammern um den Zähler und um den Nenner.

Beispiel: $\frac{2{,}5 \cdot (-8)}{-7 + 11} = \frac{-20}{4} = (-20) : 4 = -5$

Termumformungen

Vorrangregeln für das Berechnen von Termen

(1) Das Innere einer Klammer wird zuerst berechnet.
(2) Bei verschachtelten Klammern wird die innere Klammer zuerst berechnet.
(3) Wo keine Klammer steht, geht Punktrechnung vor Strichrechnung.
(4) Das Berechnen einer Potenz geht noch vor Punkt- und Strichrechnung.
(5) Sonst wird von links nach rechts gerechnet.

Auflösen und Setzen von Klammern in einem Produkt

Man multipliziert jedes Glied der Klammer mit dem Faktor.
Die Zeichen $+$ und $-$ werden nach der Vorzeichenregel gesetzt.

(1) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$5 \cdot (3x + 2y) = 5 \cdot 3x + 5 \cdot 2y$
$= 15x + 10y$

(2) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

$3x \cdot (5y - 7z) = 3x \cdot 5y - 3x \cdot 7z$
$= 15xy - 21xz$

Subtraktionsregel

Subtrahieren bedeutet das Addieren der Gegenzahl.
Die Gegenzahl erhält man durch Multiplikation mit (-1).

(1) $a - (b + c) = a + (-1) \cdot (b + c)$
$= a + (-b - c)$
$= a - b - c$

(2) $5a - (7b - 3c) = 5a + (-1) \cdot (7b - 3c)$
$= 5a + (-7b + 3c)$
$= 5a - 7b + 3c$

Auflösen einer Minusklammer

Steht ein Minuszeichen vor einer Klammer, so heißt die Klammer **Minusklammer.**
Das Minuszeichen vor einer Klammer kann als Multiplikation mit (-1) aufgefasst werden.
Man löst eine Minusklammer auf, indem man jedes Glied der Klammer mit (-1) multipliziert.

(1) $-(2a + 3b) = (-1) \cdot (2a + 3b)$
$= (-1) \cdot 2a + (-1) \cdot 3b$
$= -2a + (-3b)$
$= -2a - 3b$

(2) $-(3x - 5y) = (-1) \cdot (3x - 5y)$
$= (-1) \cdot 3x - (-1) \cdot 5y$
$= -3x - (-5y)$
$= -3x + 5y$

Setzen einer Minusklammer

Das Setzen einer Minusklammer kann als Ausklammern des Faktors (-1) aufgefasst werden.

$5a - 3b = (-1) \cdot (-5a) + (-1) \cdot 3b$
$= (-1)(-5a + 3b)$
$= -(-5a + 3b)$

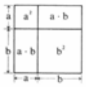
Auflösen von zwei Klammern in einem Produkt

Jedes Glied der einen Klammer wird mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert. Die Zeichen + und − werden nach der Vorzeichenregel bestimmt.

$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$

Binomische Formeln

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



Umformungsregeln für Gleichungen

Additions- und Subtraktionsregel

Addiert oder subtrahiert man auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl, so ändert sich die Lösungsmenge nicht.

$$x - 7 = 13 \quad |+7$$
$$x - 7 + 7 = 13 + 7 \quad |-7$$
$$x = 20$$
$$L = \{20\}$$

Multiplikations- und Divisionsregel

Multipliziert (dividiert) man beide Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl (durch dieselbe Zahl) ungleich 0, so ändert sich die Lösungsmenge nicht.

$$5x = 35 \quad |:5$$
$$5x : 5 = 35 : 5 \quad |\cdot 5$$
$$x = 7$$

Prozentrechnung

Bedeutung von p %

p % bedeutet $\frac{p}{100}$.

Beispiele: $14\% = \frac{14}{100} = 0{,}14$

$6{,}5\% = \frac{6{,}5}{100} = 0{,}065$

$113\% = \frac{113}{100} = 1{,}13$

Grundschema der Prozentrechnung

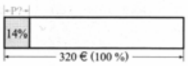
$$G \xrightarrow{\;p\%\;} P$$

Grundwert (Ganzes) — Prozentsatz (Anteil) — Prozentwert (Bruchteil)

Berechnung des Prozentwertes

$G \xrightarrow{\;p\%\;} \boxed{P}$

$P = G \cdot \frac{p}{100}$



Beispiel: Gegeben: Grundwert $G = 320$ €
Prozentsatz $p\% = 14\%$
Gesucht: Prozentwert P

Ansatz: $320\text{ €} \xrightarrow{\;14\%\;} P$

Rechnung: $P = 320\text{ €} \cdot 14\% = 320\text{ €} \cdot \frac{14}{100} = 44{,}80$ €

Ergebnis: Der Prozentwert beträgt 44,80 €.

Berechnung des Grundwertes

$\boxed{G} \xrightarrow{\;p\%\;} P$

$G = P \cdot \frac{100}{p}$

Beispiel: Gegeben: Prozentwert $P = 45$ €
Prozentsatz $p\% = 15\%$
Gesucht: Grundwert G

Ansatz: $G \xrightarrow{\;15\%\;} 45$ €

Rechnung: $G = 45\text{ €} \cdot \frac{100}{15} = 300$ €

Ergebnis: Der Grundwert beträgt 300 €.

Berechnung des Prozentsatzes

$G \xrightarrow{\;\boxed{p\%}\;} P$

$p\% = \frac{P}{G}$

Beispiel: Gegeben: Grundwert $G = 360$ €
Prozentwert $P = 108$ €
Gesucht: Prozentsatz p %

Ansatz: $360\text{ €} \xrightarrow{\;p\%\;} 108$ €

Rechnung: $p\% = \frac{108\text{ €}}{360\text{ €}} = 0{,}30 = 30\%$

Ergebnis: Der Prozentsatz beträgt 30%.

Zinsrechnung

Grundschema der Zinsrechnung

$$K \xrightarrow{\;p\%\;} Z_1 \xrightarrow{\;i\;} Z$$

Kapital — Zinssatz — Jahreszinsen — Zeitfaktor in Jahren — Zinsen

Berechnung der Zinsen

Beispiel: Gegeben: Kapital $K = 1\,200$ €
Zinssatz $p\% = 2$
Zeit 5 Monate $\left(\text{Zeitfaktor } i = \frac{5}{12}\right)$
Gesucht: Zinsen Z

Ansatz: $1\,200\text{ €} \xrightarrow{\;2\%\;} \text{Jahreszinsen } Z_1 \xrightarrow{\;\frac{5}{12}\;} \text{Zinsen } Z$

Rechnung: 1. Schritt: Jahreszinsen $Z_1 = 1\,200\text{ €} \cdot \frac{2}{100} = 24$ €

2. Schritt: Zinsen $Z = 24\text{ €} \cdot \frac{5}{12} = 10$ €

Ergebnis: Die Zinsen nach 5 Monaten betragen 10 €.

Berechnung des Zinssatzes

Beispiel: Gegeben: Kapital $K = 2\,500$ €
Zeit 4 Monate $\left(\text{Zeitfaktor } i = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}\right)$
Zinsen $Z = 12{,}50$ €
Gesucht: Zinssatz p %

Ansatz: $2\,500\text{ €} \xrightarrow{\;p\%\;} \text{Jahreszinsen } Z_1 \xrightarrow{\;\frac{1}{3}\;} 12{,}50$ €

Rechnung: 1. Schritt: Jahreszinsen $Z_1 = 12{,}50\text{ €} \cdot \frac{3}{1} = 37{,}50$ €

2. Schritt: Zinssatz $p\% = 37{,}50\text{ €} : 2\,500\text{ €} = 0{,}015 = 1{,}5\%$

Ergebnis: Der Zinssatz beträgt 1,5%.

Berechnung des Kapitals

Beispiel: Gegeben: Zinssatz $p\% = 2{,}5\%$
Zeit $\frac{3}{4}$ Jahr $\left(\text{Zinsfaktor } i = \frac{3}{4}\right)$
Zinsen $Z = 112{,}50$ €
Gesucht: Kapital K

Ansatz: $\text{Kapital } K \xrightarrow{\;2{,}5\%\;} \text{Jahreszinsen } Z_1 \xrightarrow{\;\frac{3}{4}\;} 112{,}50$ €

Rechnung: 1. Schritt: Jahreszinsen $Z_1 = 112{,}50\text{ €} \cdot \frac{4}{3} = 150$ €

2. Schritt: Kapital $K = 150\text{ €} \cdot \frac{100}{2{,}5} = 6\,000$ €

Ergebnis: Das Kapital beträgt 6 000 €.

Berechnung der Zeit

Beispiel: Gegeben: Kapital $K = 5\,400$ €
Zinssatz $p\% = 2\%$
Zinsen $Z = 27$ €
Gesucht: Zeit

Ansatz: $5\,400\text{ €} \xrightarrow{\;2\%\;} \text{Jahreszinsen } Z_1 \xrightarrow{\;i\;} 27$ €

Rechnung: 1. Schritt: Jahreszinsen $Z_1 = 5\,400\text{ €} \cdot \frac{2}{100} = 108$ €

2. Schritt: Zeitfaktor $i = 27\text{ €} : 108\text{ €} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$

Ergebnis: Die Zeit beträgt $\frac{1}{4}$ Jahr, also 3 Monate.

Dreisatzrechnung

Proportionale Zuordnungen

Für proportionale Zuordnungen gilt: Zum Doppelten (Dreifachen usw.) einer Größe gehört das Doppelte (Dreifache usw.) der zugeordneten Größe.
Zur Hälfte (zum dritten Teil usw.) einer Größe gehört die Hälfte (der dritte Teil usw.) der zugeordneten Größe.

Beispiel: Für ein indonesisches Reisgericht für 4 Personen benötigt man u. a. 120 g Langkornreis.
Wie viel g Reis benötigt man für 7 Personen?

	Personen	Reismenge	
	4	120 g	
: 4	1	30 g	: 4
· 7	7	210 g	· 7

Für 4 Personen benötigt man 120 g.
Für 1 Person benötigt man 30 g.
Für 7 Personen benötigt man 210 g.

Ergebnis: Für 7 Personen benötigt man 210 g Reis.

Antiproportionale Zuordnungen

Für antiproportionale Zuordnungen gilt: Zum Doppelten (Dreifachen usw.) einer Größe gehört die Hälfte (der dritte Teil usw.) der zugeordneten Größe.
Zur Hälfte (zum dritten Teil usw.) einer Größe gehört das Doppelte (das Dreifache usw.) der zugeordneten Größe.

Beispiel: Für eine Fahrt erhält eine Klasse aus der Elternspende einen Fahrtzuschuss.
Wenn alle 30 Schüler mitfahren, erhält jeder 15 €. Nun fahren aber nur 25 Schüler mit. Wie viel € erhält dann jeder?

	Schülerzahl	Fahrtzuschuss	
	30	15 €	
: 6	5	90 €	· 6
· 5	25	18 €	: 5

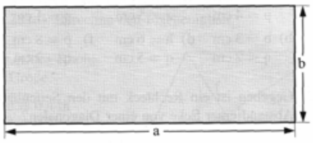
Ergebnis: Jeder Schüler erhält 18 €.

Flächenberechnungen

Flächeninhalt des Rechtecks
$A = a \cdot b$

Umfang des Rechtecks
$u = 2 \cdot (a + b)$

Beispiel: $a = 6\,\text{cm};\ b = 3{,}5\,\text{cm}$
$A = 6\,\text{cm} \cdot 3{,}5\,\text{cm} = 21\,\text{cm}^2$
$u = 2 \cdot (6\,\text{cm} + 3{,}5\,\text{cm}) = 19\,\text{cm}$

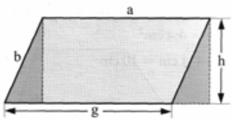


Flächeninhalt des Quadrates
$A = a^2$

Umfang des Quadrates
$u = 4 \cdot a$

Beispiel: $a = 3{,}5\,\text{cm}$
$A = (3{,}5\,\text{cm})^2 = 12{,}25\,\text{cm}^2$
$u = 4 \cdot 3{,}5\,\text{cm} = 14\,\text{cm}$

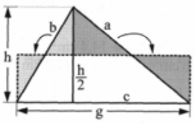
Flächeninhalt des Parallelogramms
$A = g \cdot h$



Umfang des Parallelogramms
$u = 2 \cdot (a + b)$

Beispiel: $a = g = 6\,\text{cm};\ b = 2{,}6\,\text{cm};$
$h = 2{,}4\,\text{cm}$
$A = 6\,\text{cm} \cdot 2{,}4\,\text{cm} = 14{,}4\,\text{cm}^2$
$u = 2 \cdot (6\,\text{cm} + 2{,}6\,\text{cm}) = 17{,}2\,\text{cm}$

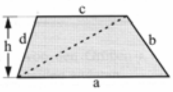
Flächeninhalt des Dreiecks
$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$



Umfang des Dreiecks
$u = a + b + c$

Beispiel: $a = 3{,}5\,\text{cm};\ b = 2{,}5\,\text{cm};\ c = g = 4\,\text{cm};\ h = 2{,}2\,\text{cm}$
$A = \frac{1}{2} \cdot 2{,}2\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 4{,}4\,\text{cm}^2$
$u = 3{,}5\,\text{cm} + 2{,}5\,\text{cm} + 4\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$

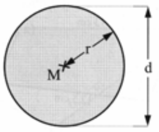
Flächeninhalt des Trapezes
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$



Umfang des Trapezes
$u = a + b + c + d$

Beispiel: $a = 5\,\text{cm};\ b = 2{,}2\,\text{cm};\ c = 3\,\text{cm};\ d = 1{,}9\,\text{cm};$
$h = 1{,}8\,\text{cm}$
$A = \frac{1}{2} \cdot (5\,\text{cm} + 3\,\text{cm}) \cdot 1{,}8\,\text{cm} = 7{,}2\,\text{cm}^2$
$u = 5\,\text{cm} + 2{,}2\,\text{cm} + 3\,\text{cm} + 1{,}9\,\text{cm} = 12{,}1\,\text{cm}$

Flächeninhalt des Kreises
$A = \pi \cdot r^2;\quad A = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$



Umfang des Kreises
$u = 2\pi \cdot r;\quad u = \pi \cdot d$

Beispiel: $r = 3\,\text{cm}$
$A = \pi \cdot 3^2\,\text{cm}^2 \approx 3{,}14 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 28{,}26\,\text{cm}^2$
$u = 2\pi \cdot 3\,\text{cm} \approx 3{,}14 \cdot 6\,\text{cm} = 18{,}84\,\text{cm}$

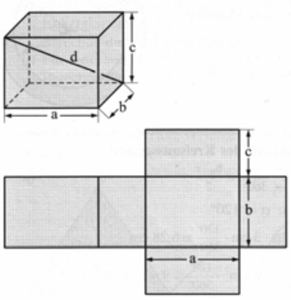
$\pi = 3{,}1415926\ \ldots$

Körperberechnungen

Volumen des Quaders
$V = a \cdot b \cdot c$

Oberfläche des Quaders
$O = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

Länge der Raumdiagonalen
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

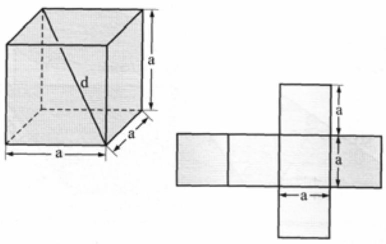


Beispiel:
$a = 4\,\text{cm};\ b = 3\,\text{cm};\ c = 2\,\text{cm}$
$V = 4 \cdot 3 \cdot 2\,\text{cm}^3 = 24\,\text{cm}^3$
$O = 2 \cdot (4 \cdot 3\,\text{cm}^2 + 4 \cdot 2\,\text{cm}^2 + 3 \cdot 2\,\text{cm}^2)$
$= 2 \cdot (12\,\text{cm}^2 + 8\,\text{cm}^2 + 6\,\text{cm}^2)$
$= 2 \cdot 26\,\text{cm}^2$
$= 52\,\text{cm}^2$
$d = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}\,\text{cm}$
$= \sqrt{29}\,\text{cm} \approx 5{,}39\,\text{cm}$

Volumen des Würfels
$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

Oberfläche des Würfels
$O = 6 \cdot a^2$

Länge der Raumdiagonalen
$d = a \cdot \sqrt{3}$



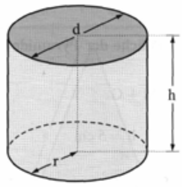
Beispiel:
$a = 4\,\text{cm}$
$V = (4\,\text{cm})^3 = 64\,\text{cm}^3$
$O = 6 \cdot (4\,\text{cm})^2 = 96\,\text{cm}^2$
$d = 4 \cdot \sqrt{3} \approx 6{,}93\,\text{cm}$

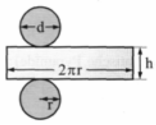
Volumen des Zylinders
$V = \pi r^2 \cdot h$

Mantelfläche des Zylinders
$M = 2\pi r \cdot h$

Oberfläche des Zylinders
$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Beispiel: $r = 3\,\text{cm};\ h = 5\,\text{cm}$
$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 5\,\text{cm}^3 = 45\pi\,\text{cm}^3 \approx 141{,}37\,\text{cm}^3$
$M = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5\,\text{cm}^2 = 30\pi\,\text{cm}^2 \approx 94{,}25\,\text{cm}^2$
$O = (2\pi \cdot 9 + 30\pi)\,\text{cm}^2 \approx 150{,}80\,\text{cm}^2$

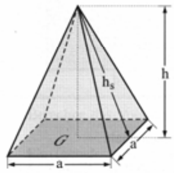




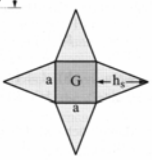
Volumen der Pyramide
$V = \frac{1}{3} G \cdot h$

Mantelfläche einer quadratischen Pyramide
$M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_s}{2} = 2a \cdot h_s$

Oberfläche der Pyramide
$O = M + G$



Beispiel (quadratische Pyramide): $a = 4\,\text{cm};\ h = 5\,\text{cm}$
$V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 5\,\text{cm}^3 \approx 26{,}67\,\text{cm}^3$
$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 + 2^2}\,\text{cm} = \sqrt{29}\,\text{cm} \approx 5{,}39\,\text{cm}$
$M = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{29}\,\text{cm}^2 \approx 43{,}08\,\text{cm}^2$
$O = 43{,}08\,\text{cm}^2 + 16\,\text{cm}^2 = 59{,}08\,\text{cm}^2$

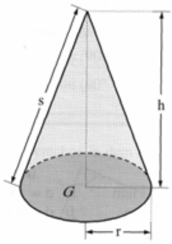


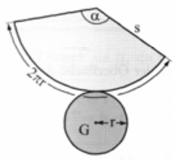
Volumen des Kegels
$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

Mantelfläche des Kegels
$M = \pi rs$

Oberfläche des Kegels
$O = \pi r^2 + \pi rs$

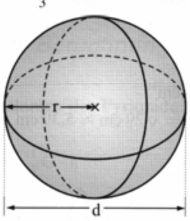
Beispiel: $r = 2\,\text{cm};\ h = 5\,\text{cm}$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5\,\text{cm}^3 = \frac{20}{3} \pi\,\text{cm}^3 \approx 20{,}94\,\text{cm}^3$
Länge der Mantellinie: $s = \sqrt{5^2 + 2^2}\,\text{cm} = \sqrt{29}\,\text{cm} \approx 5{,}39\,\text{cm}$
$M = \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{29}\,\text{cm}^2 \approx 33{,}84\,\text{cm}^2$
$O = (\pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{29})\,\text{cm}^2 \approx 46{,}40\,\text{cm}^2$





Volumen der Kugel
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Oberfläche der Kugel
$O = 4\pi r^2$



Beispiel: $r = 2\,\text{cm}$
$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3\,\text{cm}^3$
$= \frac{32}{3} \pi\,\text{cm}^3 \approx 33{,}51\,\text{cm}^3$
$O = 4\pi \cdot 2^2\,\text{cm}^2$
$= 16\pi\,\text{cm}^2 \approx 50{,}27\,\text{cm}^2$

Anhang B: Ergebnisse der Übungsaufgaben

Ü 1.1 **a)** $\frac{5}{8}$
b) $1\frac{2}{7}$

Ü 1.2 **a)** 1
b) $\frac{1}{4}$

Ü 1.3 **a)** 10
b) -4

Ü 1.4 **a)** $\frac{5}{6}$
b) -2

Ü 1.5 **a)** 11
b) 3

Ü 1.6 **a)** 23
b) -1

Ü 1.7 **a)** $-\frac{4}{9}$
b) $1\frac{3}{7}$

Ü 1.8 **a)** 2
b) $-\frac{1}{5}$

Ü 2.1 **a)** $x = 1$
b) $x = 7$

Ü 2.2 **a)** $x = -4$
b) $x = -18$

Ü 2.3 **a)** $x = -2$
b) $x = 6$

Ü 2.4 **a)** $x = 5$
b) $x = -1$

Ü 2.5 **a)** $x = -5$
b) $x = 1\frac{1}{2}$

Ü 2.6 **a)** $x = -1$
b) $x = 2$

Ü 2.7 **a)** $x = 0$
b) $x = 3$

Ü 2.8 **a)** $x = 4$
b) $x = -9$

Ü 3.1 **a)** b = 4 cm ; u = 20 cm
b) b = 2,3 m ; u = 13 m
c) a = 6 mm ; u = 34 mm
d) a = 6,2 cm ; u = 18,2 cm
e) b = 12 cm ; A = 48 cm^2
f) a = 10,4 cm ; A = 81,12 cm^2

Ü 3.2 **a)** A = 9,8 cm^2 ; u = 13,6 cm
b) A = 8 cm^2 ; u = 13 cm
c) A = 32,5 cm^2 ; u = 24,2 cm

Ü 3.3 614,15 €

Ü 3.4 **a)** 92.250 m^2
b) 55.350 €

Ü 3.5 **a)** 84 m^2
b) 6.720 €

Ü 3.6 **a)** 7.092,75 €
b) 2.354,60 €
c) 9,408,75 €

Ü 3.7 356.345 €

Ü 3.8 15,78 m

Ü 3.9 9,1 m^2

Ü 3.10 589,564 kg

Ü 3.11 $V \approx 11{,}547\ m^3$

$M \approx 30{,}79\ m^2$

$O \approx 37{,}72\ m^2$

Ü 3.12 **a)** $s \approx 3{,}61\ cm$

$V \approx 12{,}57\ cm^3$

$M \approx 22{,}65\ cm^2$

$O \approx 35{,}22\ cm^2$

b) $h \approx 5{,}29\ cm$

$V \approx 199{,}48\ cm^3$

$M \approx 150{,}8\ cm^2$

$O \approx 263{,}89\ cm^2$

c) $r \approx 0{,}455\ m$

$h \approx 0{,}532\ m$

$V \approx 0{,}115\ m^3$

$O \approx 1{,}65\ m^2$

d) $r \approx 13{,}058\ cm$

$s \approx 19{,}145\ cm$

$M \approx 785{,}402\ cm^2$

$O \approx 1.321{,}117\ cm^2$

e) $r \approx 0{,}564\ m$

$s \approx 1{,}975\ m$

$h \approx 1{,}892\ m$

$V \approx 0{,}631\ m^3$

Ü 4.1 13,5 kg

Ü 4.2 24 Tage

Ü 4.3 **a)** 27mal
b) 9 Lkw

Ü 4.4 55 m

Ü 4.5 418 Stück

Ü 4.6 441,6 km

Ü 4.7 16 Tage

Ü 4.8 60 %

Ü 4.9 49,77 €

Ü 4.10 $8.130{,}851\ m^3$

Ü 4.11 9,2 %

Ü 4.12 395,15 €

Ü 4.13 41,7 %

Ü 4.14 700 €

Ü 4.15 **a)** 504 €
b) 378 €
c) 294 €
d) 58,80 €

Ü 4.16 **a)** 4 %
b) 6 %
c) 5 %
d) 3 %

Ü 4.17 **a)** 1.500 €
b) 3.600 €
c) 5.000 €

Ü 4.18 **a)** 4 Monate
b) 6 Monate
c) 9 Monate

Ü 4.19 Finanzierungskosten pro Monat: 420 €

Ü 4.20 384,09 €

Literaturhinweis: Das in diesem Skript zusammengestellte Übungsmaterial stammt zum größten Teil aus dem Buch

Helmut Postel, *Aufgabensammlung zur Übung und Wiederholung - Mathematik*
Schroedel Verlag, Hannover 1998, ISBN 3-507-73221-1

Nachfragen, Anregungen und Kritik bitte per E-mail an den die Fachschaft Mathematik unter *mathematik@weser-kolleg.net*