

Einfache RC-Schaltungen

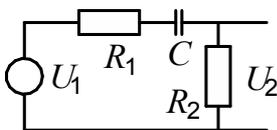
Manfred Zollner

Gleichspannungsnetzwerke bestehen aus (ohmschen) Widerständen, ggf. ergänzt um Spannungs- und/oder Stromquellen. Sobald eine Übertragungseigenschaft frequenzabhängig sein soll, müssen Bauteile mit frequenzabhängigen Impedanzen vorhanden sein, also Kapazitäten und/oder Induktivitäten. Die folgenden Seiten beschreiben eine Untergruppe daraus, nämlich Netzwerke, die neben den Quellen nur Widerstände (R) und Kondensatoren (C) enthalten. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Beschreibung im Frequenzbereich, Anwendungsbeispiele sind einfache Filterschaltungen, sowie die Frequenzkompensation beim Operationsverstärker.

Sobald man die Tiefebene der einfachen Gleichspannungsnetzwerke durchschritten hat und zu den Höhen der Wechselspannungsnetzwerke emporgestiegen ist, kommt die Sonne hervor: Komplexe Faltungsintegrale, die unausweichliche Fourier-Transformation, Pol-/Nullstellenpläne, Differentialgleichungen, Matrizen, Tensoren gar – alles, was den Mathematiker erfreut. Den Schaltungstechniker, der einen Verstärker zum Laufen bringen will, erfreuen diese Theorien nicht immer. Zwar ist unbestritten, dass derartige Theorien unverzichtbar sind, es empfiehlt sich aber der Bottom-up-Ansatz (die Induktion, im Gegensatz zur Deduktion): Mit einfachen Schaltungen beginnen, und nicht die Welt im ersten Schritt als vieldimensional, nicht-linear, zeitvariant und anisotrop zu modellieren (auch wenn das in Elite-Unis noch immer gern gesehen wird).

Die folgenden Seiten erläutern anhand einfacher Beispiele grundlegende Prinzipien aus Schaltungstechnik und Systemtheorie. Hierbei wäre es möglich, aus Gründen der Einfachheit (siehe oben...) auf die komplexe Rechnung ganz zu verzichten – es ginge auch ohne, mit rein reellen Zahlen. Es ginge – aber auf Kosten der Übersichtlichkeit, die auf der Strecke bliebe, sobald die Komplexität (sic!) der Schaltung wächst. Grundkenntnisse in Elektrotechnik und komplexer Rechnung sollten also vorhanden sein, als Nachschlagewerk ist z.B. "der Möller" geeignet: *Möller F.: Grundlagen der Elektrotechnik, Springer 2013*. Die **Frequenz** ist bei dieser Art der Netzwerkanalyse komplex definiert: $\underline{p} = \sigma + j\omega$. Auch der Buchstabe \underline{s} ist anstelle von \underline{p} gebräuchlich; hier steht aber \underline{p} , um zu vorhergehenden Texten kompatibel zu sein. Dass eine Größe komplex ist, wird durch **Unterstreichen** zum Ausdruck gebracht. Zumindest, wenn man sehr sorgfältig ist, denn oft wird darauf auch verzichtet, vor allem, wenn die Situation eindeutig ist. Eine komplexe Zahl besteht aus der Summe von einem Real- und einem mit j multiplizierten Imaginärteil: $\underline{x} = \text{Re}(\underline{x}) + j\text{Im}(\underline{x})$. Dabei ist j die imaginäre Einheit, die in der Mathematik i genannt wird: $j = \sqrt{-1}$. Der Buchstabe i ist in der Elektrotechnik aber so untrennbar mit der Stromstärke verbunden, dass hier nicht i , sondern j verwendet wird. Der **Betrag** einer komplexen Zahl wird entweder mit den (senkrechten) Betragsstrichen zum Ausdruck gebracht $|\underline{x}|$, oder dadurch, dass die Unterstreichung entfällt. Und, ja, gerade hieß es doch, auf das Unterstreichen würde oft aus Gründen der Bequemlichkeit verzichtet, besteht da nicht Verwechslungsgefahr? Richtig, da muss man aufpassen. Manche Texte halten das Unterstreichen konsequent durch, andere unterstreichen generell nicht, und wieder andere unterstreichen nur, wenn Verwechslungsgefahr besteht.

Im Folgenden soll die Wirkung von Widerständen und Kondensatoren anhand von einigen einfachen Beispielen erläutert werden. Bei der **kapazitiven Kopplung** trennt ein Kondensator den Gleichspannungsanteil der vorhergehenden Stufe ab, die Schaltung wirkt als Hochpass erster Ordnung (die Ordnung gibt an, wie viele unabhängige Speicher beteiligt sind). Die Schaltung in **Abb. 1** ist ein typisches Beispiel: R_1 ist der Innenwiderstand der vorhergehenden Stufe, R_2 der Eingangswiderstand der folgenden Stufe. R_1 ist nicht immer in dieser Form sichtbar – bei einer Röhre oder einem Transistor muss dieser Wert aus dem Datenblatt entnommen (und ggf. um weitere Widerstände ergänzt) werden. Die Grenzfrequenz, die bei Systemen erster Ordnung auch 3-dB-Frequenz, Eckfrequenz, Knickfrequenz oder Polfrequenz heißt, berechnet sich zu: $f_g = 1/[2\pi C(R_1 + R_2)] = 1/(2\pi\tau)^*$. Dass daran auch der Innenwiderstand beteiligt ist, darf nicht übersehen werden. Die Bedeutung von k erschließt sich leicht, wenn C und R_1 ihre Plätze tauschen (was an der Funktion nichts ändert): Dann entsteht am Ausgang ein einfacher reeller Spannungsteiler.



$$\underline{H} = \frac{U_2}{U_1} = k \cdot \frac{p\tau}{1 + p\tau} \quad s(t) = k \cdot \exp(-t/\tau), \quad t > 0$$

$$k = R_2 / (R_1 + R_2); \quad \tau = C(R_1 + R_2)$$

Abb. 1: Kapazitive Kopplung zweier Verstärkerstufen, $p = j\omega$, $j = \sqrt{-1}$.

Aus der (spektralen) Übertragungsfunktion \underline{H} können Betrags- und Phasenfrequenzgang abgeleitet werden, die (zeitliche) Sprungantwort $s(t)$ beschreibt das Ausgangssignal, wenn am Eingang (U_1) ein Sprung von null auf eins erfolgt. Sprungantwort und ihr zeitliches Differential, die Impulsantwort, sind bezüglich ihrer Einheiten nicht sofort verständlich, für ausführliche Erläuterungen muss auf die Fachliteratur verwiesen werden [z.B. 1]. In **Abb. 2** sind die zu **Abb. 1** gehörenden Diagramme dargestellt. Für hohe Frequenzen ($f \rightarrow \infty$, bzw. $p \rightarrow \infty$) geht die Übertragungsfunktion gegen eins, für tiefe Frequenzen gegen null. Weil dabei der Nenner von \underline{H} gegen null geht, verbleibt im Zähler eine f -Proportionalität. Auf der Filterflanke ($f \ll f_g$) nimmt bei einer Frequenz-Verzehnfachung H auf das Zehnfache zu, das entspricht einem Pegelzuwachs von 20dB (Flankensteilheit 20 dB/Dekade = 6 dB/Oktave).

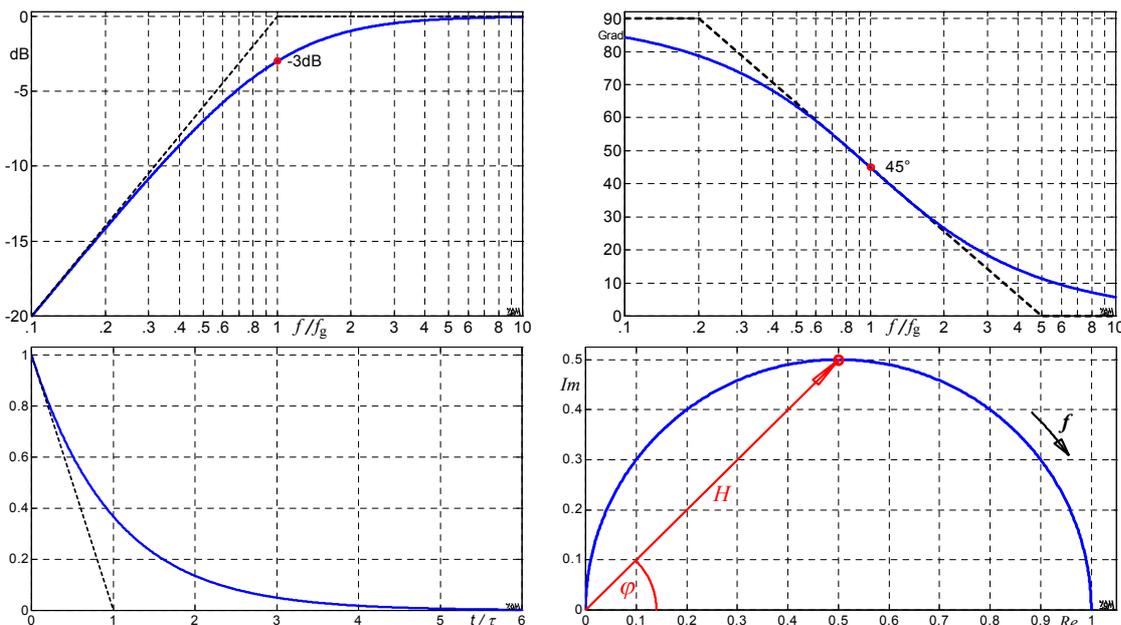


Abb. 2: Kapazitive Kopplung zweier Verstärkerstufen: Betrag, Phase, Sprungantwort, Ortskurve. Die Auswirkungen von k sind hier nicht berücksichtigt, die Bilder stehen für $k = 1$ (bzw. $R_1 = 0$).

* τ ist eine Zeitkonstante, siehe später.

Die Ortskurve stellt in einem Bild den Zusammenhang zwischen Betrag und Phase einerseits, und Realteil (Re) und Imaginärteil (Im) andererseits dar. Der Abstand eines Punktes vom Ursprung ist der Betrag der Übertragungsfunktion (roter Pfeil), der Winkel zur Abszisse ist der Phasenwinkel. Die Abszisse des roten Pfeils ist der Realteil, die Ordinate ist der Imaginärteil der Übertragungsfunktion.

Das o.a. System ist ein regulärer Hochpass erster Ordnung (HP1). Im allgemeinsten Fall lässt sich ein System erster Ordnung durch eine gebrochen rationale Funktion beschreiben, deren Zähler und Nenner Polynome erster Ordnung von p sind:

$$\underline{H} = \frac{A + Bp}{C + Dp} = \frac{A/C + p \cdot B/C}{1 + p \cdot D/C} = \frac{A}{C} \cdot \frac{1 + p \cdot B/A}{1 + p \cdot D/C} = k \cdot \frac{1 + a \cdot p}{1 + b \cdot p}$$

Der Bruch hat zunächst vier Parameter (Freiheitsgrade), die aber nicht unabhängig sind. Kürzt man durch C , bleiben nur noch drei Parameter übrig, zieht man A/C als Grundverstärkung vor den Bruch, bleiben **zwei Freiheitsgrade** (a und b). Die Grundverstärkung k ist natürlich nicht unwichtig, aber doch sehr leicht (und frequenzunabhängig) zu realisieren; deshalb wird sie im Folgenden meistens ignoriert. Abgesehen von der Grundverstärkung kann ein System erster Ordnung also nur maximal zwei Freiheitsgrade haben: Im Zeitbereich (zwei Zeitkonstanten), im Frequenzbereich (zwei Eckfrequenzen), und bei den Bauteilen – dort kommt mit dem Widerstandsniveau aber noch ein dritter Freiheitsgrad hinzu, der für die Übertragungseigenschaften jedoch bedeutungslos ist (wohl aber bei Impedanzbetrachtungen eine Rolle spielt).

Die o.a. Übertragungsfunktion nähert sich (ohne Berücksichtigung von k) für tiefe Frequenzen dem Wert 1, für hohe Frequenzen einem anderen Wert, nämlich a/b . Ist $a > b$, liegt ein **Hochpass mit Gegenhalt** vor, ist $a < b$, handelt es sich um einen **Tiefpass mit Gegenhalt**. Das System erster Ordnung bietet also die Möglichkeit, von einem ersten Verstärkungsplateau monoton zu einem zweiten Verstärkungsplateau überzugehen. In **Abb. 3** ist zusätzlich zu den Tiefpässen mit Gegenhalt auch der reguläre Tiefpass (--- ohne Gegenhalt) eingezeichnet.

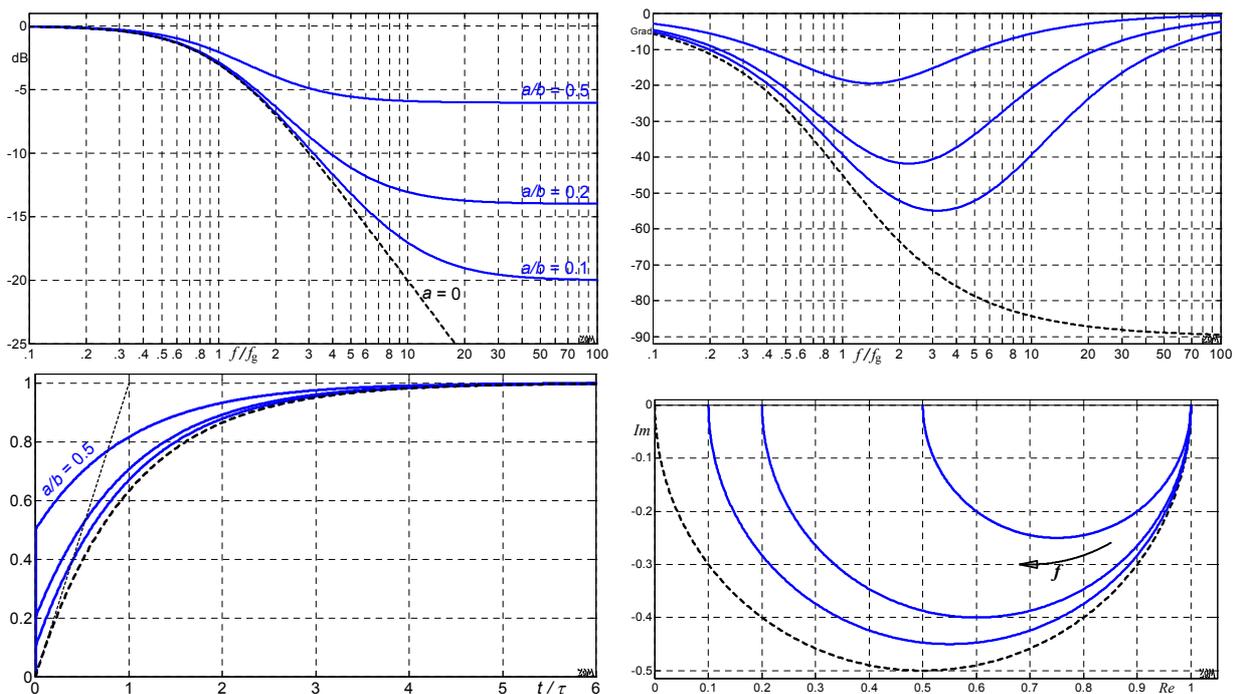


Abb. 3: Tiefpass erster Ordnung mit Gegenhalt (TP1g): Betrag, Phase, Sprungantwort, Ortskurve; $k = 1$.

In der Ortskurve ist gut zu erkennen, dass nur beim regulären Tiefpass (TP1) die Phase für hohe Frequenzen gegen -90° dreht – mit Gegenhalt (TP1g) dreht sie auf 0° zurück. **Abb. 4** zeigt entsprechende Bilder für den Hochpass mit Gegenhalt (HP1g). Hierfür ist es zweckmäßig, die Formel der Übertragungsfunktion zu modifizieren: $\underline{H} = k \cdot (a + p)/(b + p)$.

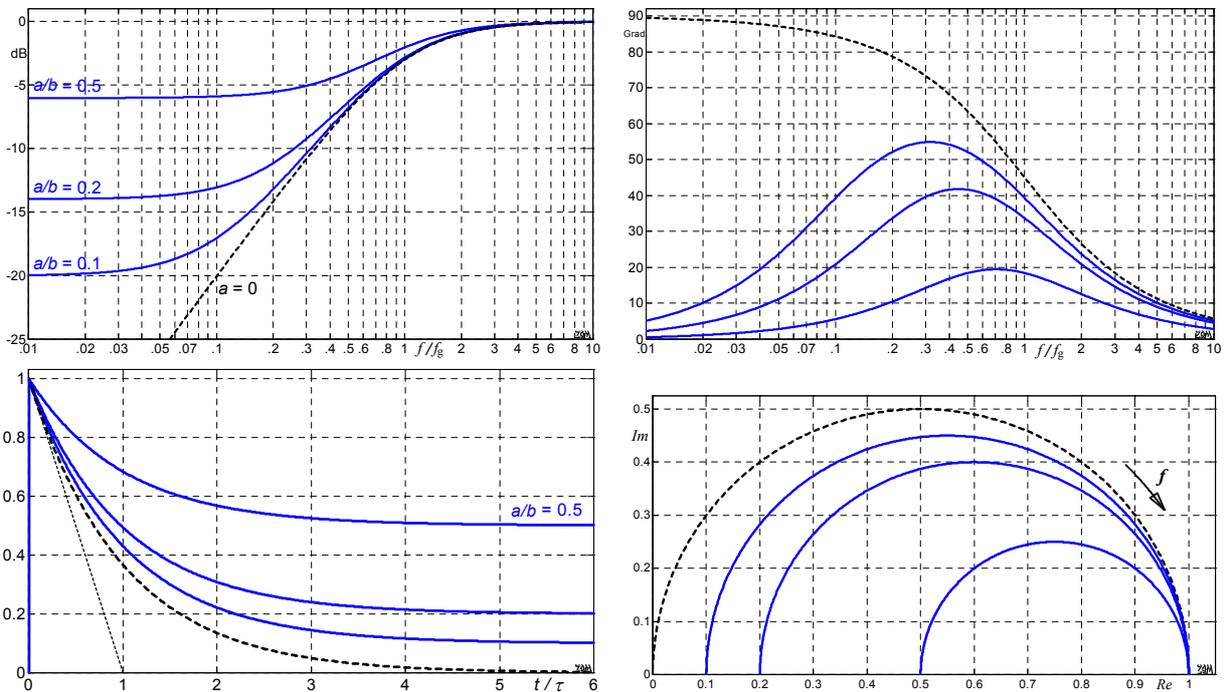


Abb. 4: Hochpass erster Ordnung mit Gegenhalt (HP1g): Betrag, Phase, Sprungantwort, Ortskurve; $k = 1$.

In **Abb. 5** sind mögliche Schaltungsrealisierungen dargestellt. Der Kondensator wirkt bei sehr hohen Frequenzen praktisch als Kurzschluss. Beim HP1g verbindet er somit Ein- und Ausgang, die Hochfrequenzverstärkung ist 1 (reell). Tieffrequent ist der C hochohmig, die Schaltung wirkt als reeller Spannungsteiler. Der TP1g wirkt hochfrequent als reeller Spannungsteiler, tieffrequent ist die Verstärkung 1 (reell).

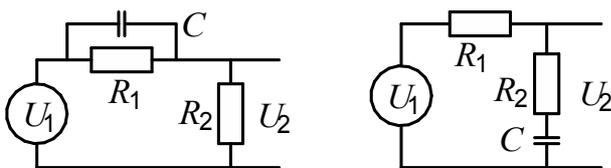


Abb. 5: Hochpass (links) und Tiefpass (rechts) erster Ordnung mit Gegenhalt; Ausgang unbelastet!

Die Anzahl der Freiheitsgrade soll nochmals aufgegriffen werden. Sowohl in der Übertragungsfunktion, als auch in der (hier nicht diskutierten) beschreibenden Differentialgleichung gibt es zwei frei wählbare Parameter. Dabei ist (wie erwähnt) $k = 1$ vorausgesetzt, d.h. die hochfrequente Verstärkung beim HP1g und die tieffrequente Verstärkung beim TP1g sind gleich 1. Damit hat auch der Betragsfrequenzgang zwei Freiheitsgrade (**Abb. 6**). Die kann man a) als Verstärkungsunterschied (im Bild 20dB) und b) als Frequenzlage interpretieren (ob bei 1 kHz oder 1MHz). Oder man definiert die beiden Eckfrequenzen, im Bild mit den Linien (---) angedeutet. Bei der Eckfrequenz sind im Zähler und Nenner Real- und Imaginärteil gleich groß, beim HP1g also: $a = p$ bzw. $b = p$. Im Zeitbereich (Sprungantwort) sind die beiden Freiheitsgrade das Verhältnis von End- zu Anfangswert (in Abb. 4: 0.5, 0.2, 0.1) und die absolute Größe der Zeitkonstante. Und bei der Schaltung? Die hat drei Bauteile! Für die Übertragung ist es aber egal, ob man 1k Ω , 1k Ω , 10nF verwendet, oder 10k Ω , 10k Ω , 1nF.

Dieses "Widerstandsniveau" bekommt Bedeutung, wenn die vollständigen Vierpolmatrizen aufgestellt werden, für die Übertragungsfunktion und die Sprungantwort ist es aber bedeutungslos. Natürlich muss die Schaltung so bleiben, wie sie in Abb. 5 dargestellt ist. Also ohne Ausgangsbelastung. Ist ein zusätzlicher Lastwiderstand vorhanden, muss er beim HP1g zu R_2 hinzugerechnet werden, beim TP1g zu R_2 und C .

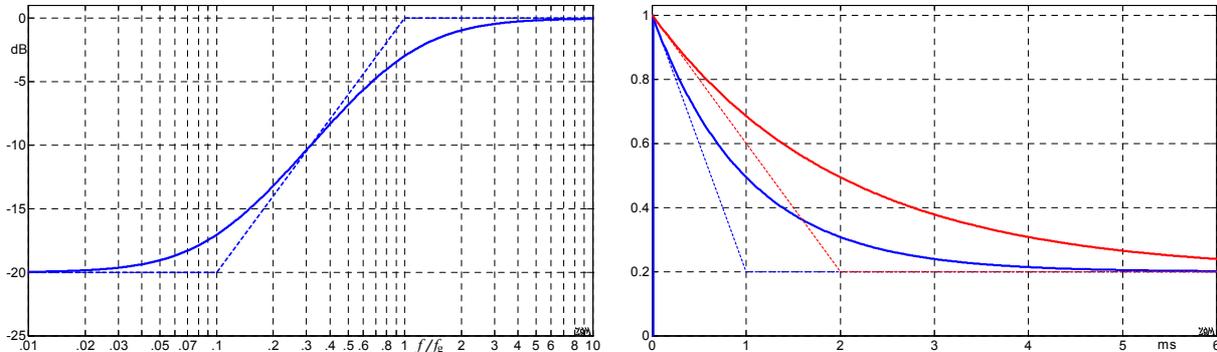


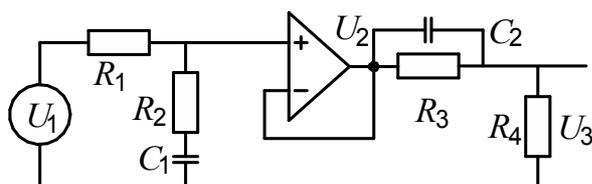
Abb. 6: Hochpass erster Ordnung mit Gegenhalt (HP1g), $\Delta L = 20\text{dB}$. Die Verbindungslinie der Eckfrequenzen (---) approximiert nicht die Steigung im Wendepunkt! Rechts für $\Delta L = 14\text{dB}$, $\tau = 1\text{ms}$ (blau) und $\tau = 2\text{ms}$ (rot).

Insbesondere muss bei diesen Filtern erster Ordnung bedacht werden, dass die Übergangssteigung nicht als freier Parameter zur Verfügung steht. Wenn z.B. wie in Abb. 6 die untere Eckfrequenz zu 0.1kHz und die obere zu 1kHz gewählt wurde, liegt damit die ganze Kurve fest. Weder kann nun das Dämpfungsverhältnis ($\Delta L = 20\text{dB}$) unabhängig gewählt werden, noch die Steigung im Übergangsbereich. Es gibt eben nur zwei frei wählbare Parameter.

Nun sollen ein TP1g und ein HP1g **in Kette** geschaltet werden. Mit einem dazwischenliegenden Trennverstärker, um weiterhin mit den einfachen Gleichungen des Ausgangsleerlaufs rechnen zu können (**Abb. 7**). Die beiden Eckfrequenzen des TP1g seien 1kHz und 10kHz . Aus der Gleichheit von Real- und Imaginärteil des Zählers berechnet sich daraus mit $C_1 = 1\text{nF}$ $R_2 = 1/(2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot C_1) = 15.9\text{k}\Omega$, und über den Nenner $R_1 = 9 \cdot R_2 = 143\text{k}\Omega$. Als Letztes soll der HP1g so dimensioniert werden, dass er die Wirkung des TP1g kompensiert. Durch die trennende Wirkung des Verstärkers dürfen sich die Widerstandsniveaus unterscheiden (z.B. durch die willkürliche Wahl $C_1 = C_2 = C$), bzgl. der Übertragung hat die Gesamtschaltung nur 4 Freiheitsgrade. Zwei wurden bereits für den TP1g verbraucht, die restlichen beiden müssen so gewählt werden, dass sich in der Gesamt-Übertragungsfunktion die Frequenzabhängigkeit herauskürzt:

$$\underline{H} = \frac{1 + pC_1R_2}{1 + pC_1(R_1 + R_2)} \cdot \frac{R_4 + pC_2R_3R_4}{R_3 + R_4 + pC_2R_3R_4} = \frac{(1 + pCR_2) \cdot (1 + pCR_3)}{(1 + 10pCR_2) \cdot (10 + pCR_3)} \Rightarrow \frac{1}{10}$$

Man erkennt leicht, dass die Frequenzunabhängigkeit für $R_3 = 10 \cdot R_2$ erreicht wird. Damit lautet die Dimensionierung: $C_1 = C_2 = C = 1\text{nF}$, $R_1 = 143\text{k}\Omega$, $R_2 = 15.9\text{k}\Omega$, $R_3 = 159\text{k}\Omega$, und $R_4 = 17.7\text{k}\Omega$ (gerundete Werte). Die Diagramme hierzu zeigt **Abb. 8**.



$$\underline{H}_{\text{TP1g}} = \frac{1 + pC_1R_2}{1 + pC_1(R_1 + R_2)}$$

$$\underline{H}_{\text{HP1g}} = \frac{R_4 + pC_2R_3R_4}{R_3 + R_4 + pC_2R_3R_4}$$

Abb. 7: TP1g und HP1g in Kette. Der dazwischengeschaltete (ideale) Trennverstärker hat $H = 1$.

Man erkennt in Abb. 8, wie sich sowohl der Betrags- als auch der Phasenfrequenzgang kompensieren. Die Gesamtverstärkung ist -20dB (frequenzunabhängig), die Gesamtphase ist im gesamten Frequenzbereich identisch null. Die Gesamtschaltung wirkt also wie ein rein resistiver Spannungsteiler, der das Signal auf 1/10 teilt.

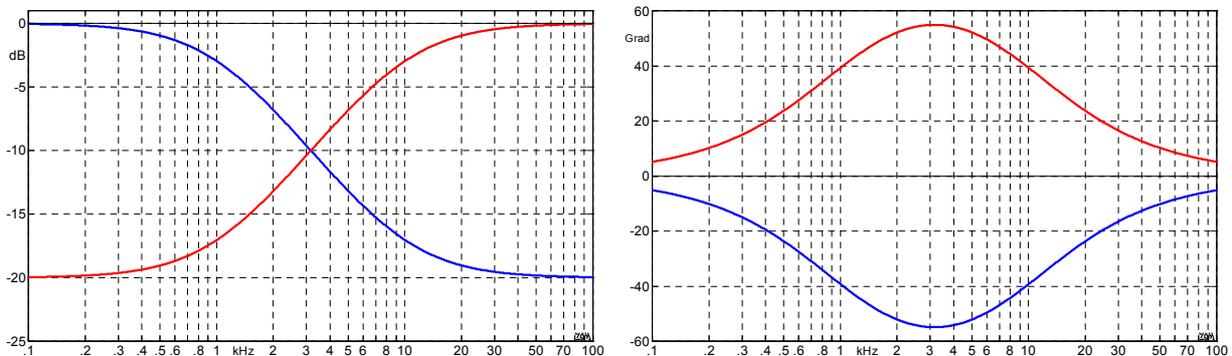


Abb. 8: Betrag- und Phasenfrequenzgang der Kettenschaltung.

Der **Fundamentalsatz** der Algebra lehrt, dass ein Polynom n -ter Ordnung genau n Lösungen hat*. Jedes Polynom lässt sich also auch durch seine Wurzeln (Lösungen) definieren, wobei lediglich eine multiplikative Konstante (Grundverstärkung) unbeachtet bleibt. Durch Nullsetzen des Zählers der Übertragungsfunktion erhält man ihre **Nullstellen**, durch Nullsetzen des Nenners ihre **Pole**. Bei Systemen erster Ordnung sind Pole und NSt immer reell. Ist das System stabil (bei passiven Systemen immer der Fall), liegen alle Pole in der linken p -Halbebene. Ist das System minimalphasig, liegen alle NSt in der linken p -Halbebene [1]. Die o.a. Schaltungen sind sowohl stabil, als auch minimalphasig, ihre P/N-Verteilung zeigt **Abb. 9**. Für den allgemeinen Fall berechnen sich Pole und NSt zu:

$$\underline{H} = k \cdot \frac{1 + a \cdot p}{1 + b \cdot p} \quad p_0 = -1/a; \quad p_x = -1/b.$$

Falls das konstante Glied des Zählers null ist (TP1 ohne Gegenhalt), liegt die NSt im Unendlichen. Das konstante Glied des Nenners kann bei technischen Systemen nicht null sein, weil dann die Verstärkung bei $f = \infty$ unendlich wäre. Für $a = 0$ (HP1 ohne Gegenhalt) liegt die NSt im Ursprung. Den Fall vollständiger Kompensation (Abb. 8) erreicht man, wenn die TP1g-NSt auf den HP1g-Pol zu liegen kommt und die HP1g-NSt auf den TP1g-Pol. In diesem Fall kürzen sich die Polynome weg, es verbleibt nur eine Konstante (im Beispiel 1/10).



Abb. 9: Pole und Nullstellen von TP1g (links) und HP1g (rechts).

* Gelegentlich wird dem Polynom ein "Grad" zugeordnet (n -ten Grades), und der zugehörigen Kurve eine "Ordnung" (n -te Ordnung). Hier wird generell nur der Begriff "Ordnung" verwendet.

Bei einem **Allpass** ist der Betrag der Übertragungsfunktion konstant, er hängt nicht von der Frequenz ab; die Phase hingegen ist frequenzabhängig. **Abb. 10** zeigt eine passive und eine aktive Allpass-Schaltung erster Ordnung. Der linke Teil der passiven Schaltung ist ein TP1, der rechte ein HP1. Die Ausgangsspannung entsteht an der (unbelasteten!) Brückendiagonale, als Differenz zwischen TP- und HP-Spannung. Beim aktiven Allpass berechnet man zuerst die Übertragung auf \underline{U}_2 . Weil der OP-Eingang hochohmig ist, ergibt sich ein TP1. Dieselbe Spannung (\underline{U}_2) liegt am invertierenden Eingang (Gegenkopplung), damit kann \underline{U}_3 berechnet werden. Der Allpass hat nur einen Freiheitsgrad, die Zeitkonstante $\tau = RC$. **Der passive AP** hat vier Bauteile, also zunächst vier Freiheitsgrade. Die Wahl von RC bindet einen Freiheitsgrad, die Wahl der beiden Widerstandsniveaus (die unterschiedlich sein dürften) zwei weitere. Der vierte Freiheitsgrad wird dadurch gebunden, dass ein AP entstehen muss (gleiche Zeitkonstante im Zähler und Nenner. **Beim aktiven AP** können im Tiefpasszweig das Widerstandsniveau und die Zeitkonstante frei gewählt werden. Unabhängig davon kann das Widerstandsniveau der Gegenkopplung bestimmt werden; über das Verhältnis der Gegenkopplungs-Widerstände ist die Grundverstärkung definierbar.

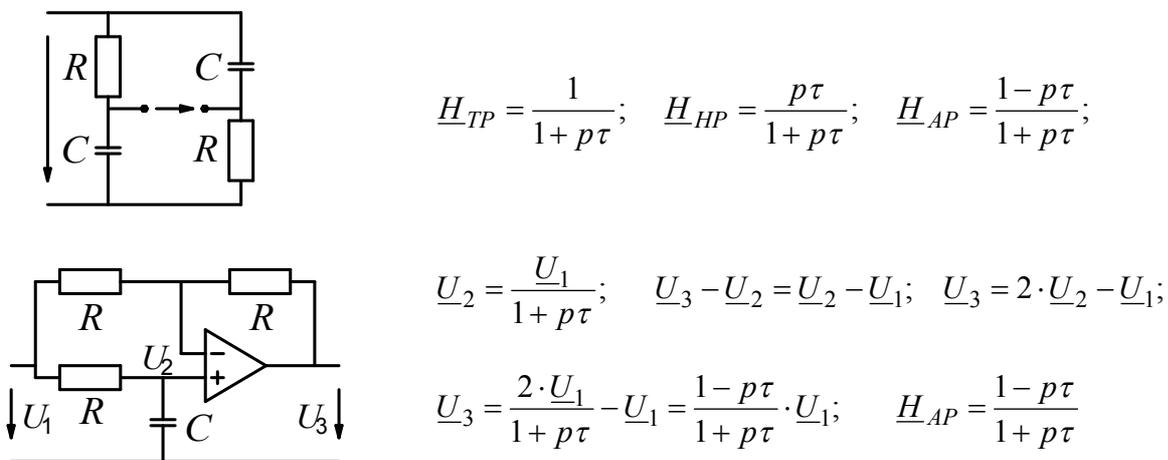


Abb. 10: Allpass erster Ordnung; passive Realisierung (oben), aktive Realisierung (unten). $RC = \tau$.

Die Bedingung für eine Allpassfunktion lässt sich für den allgemeinen Fall $\underline{H} = (1+ap)/(1+bp)$ leicht festlegen: Wenn der Betrag von \underline{H} für tiefe und hohe Frequenzen gleich sein soll, muss entweder $a = b$ gelten; das ist der triviale Fall. Oder es gilt Zähler = *conj*(Nenner), $a = -b$; das ist der Allpassfall. Bei allen Allpässen kann der Zähler aus dem Nenner durch komplexe Konjugation abgeleitet werden (oder umgekehrt). In **Abb. 11** sind Phasengang und Rechteck-Antwort dargestellt. Obwohl $|\underline{H}|$ konstant ist, verdreifacht sich der Spitzenwert! Und der Effektivwert? Trotz erheblicher Formänderung bleibt der gleich – die Leistung wird durch Phasendrehungen ja nicht verändert.

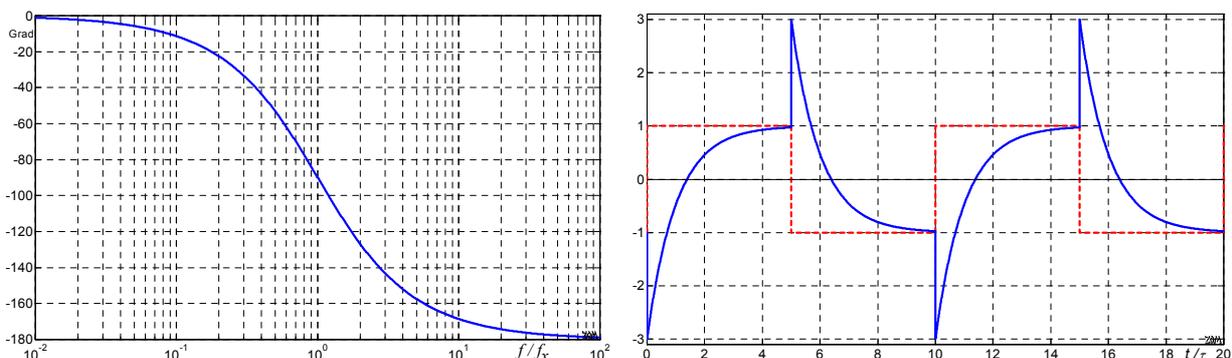


Abb. 11: Phasengang und Rechteck-Antwort eines Allpasses erster Ordnung (AP1). Hochfrequente Anteile (Rechteck-Sprung) sind gegenphasig, tieffrequente Anteile (Rechteck-Dach) sind gleichphasig.

Etwas komplizierter ist die Analyse eines **Doppel-T-Gliedes** (Abb. 12). Derartige Filter verwendet man, um einen schmalen Frequenzbereich zu unterdrücken (Verzerrungsmessung). Einen Weg zur Berechnung bietet die **Stern-Dreieck-Transformation** (Abb. 13). Mit ihrer Hilfe lässt sich eine Sternschaltung (T-Schaltung) in eine äquivalente Dreieckschaltung (Pi-Schaltung) umrechnen. Der $2R$ - $2C$ - $2R$ -Stern und der C - R - C -Stern werden in je eine Dreieckschaltung umgerechnet, wobei nur Z_b und Z_c benötigt werden (Z_a liegt parallel zur Quelle). Letztlich entsteht somit ein relativ einfacher Spannungsteiler (Abb. 12 ganz rechts), dessen Übertragungsfunktion leicht \underline{H} berechnet werden kann.

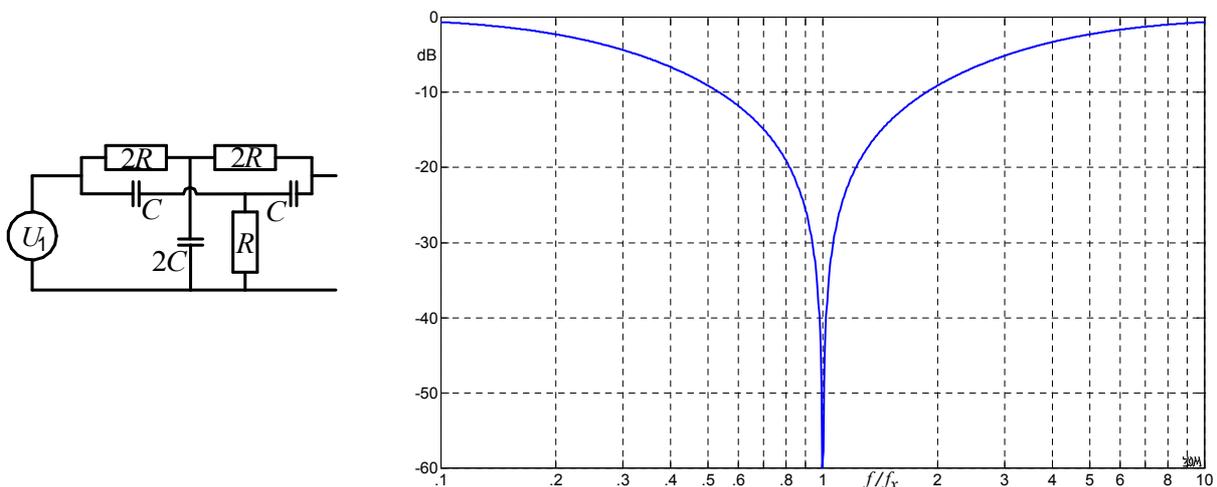


Abb. 12: Doppel-T-Glied (Ausgangsleerlauf!) als Notch-Filter. Rechts der Betragsfrequenzgang.

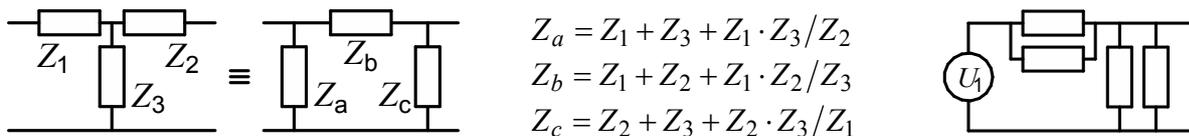


Abb. 13: Stern-Dreieck-Transformation; die beiden Schaltungen sind äquivalent. Bei idealer Spannungssteuerung muss Z_a nicht berücksichtigt werden (liegt parallel zur Spannungsquelle).

Die Umrechnung des C - R - C -Sterns ergibt:

$$Z_b = 1/pC + 1/pC + \frac{(1/pC) \cdot (1/pC)}{R} = \left(2 + \frac{1}{pRC}\right) / pC \quad Z_c = R + 1/pC + \frac{R/pC}{1/pC} = 2R + 1/pC$$

Die Umrechnung des $2R$ - $2C$ - $2R$ -Sterns ergibt:

$$Z_b = 2R + 2R + \frac{4R^2}{1/(2pC)} = 4R + 8pCR^2 \quad Z_c = 2R + 1/(2pC) + 1/(2pC) = 2R + 1/pC$$

Daraus die Gesamt-Übertragungsfunktion:

$$\underline{H} = \frac{1 + 2pRC + 4(pRC)^2 + 8(pRC)^3}{1 + 10pRC + 20(pRC)^2 + 8(pRC)^3} \Rightarrow \frac{1 + 4(pRC)^2}{1 + 8pRC + 4(pRC)^2}$$

Die Schaltung hat drei Speicher (drei Kapazitäten) – diese sind aber nicht unabhängig, das System ist nur von 2. Ordnung. Eine Polynomdivision (durch $0.5 + pRC$) bestätigt, dass sich ein Pol und eine Nullstelle wegekürzen. Es bleiben nur zwei konjugierte Nullstellen auf der $j\omega$ -Achse bei $\omega_0 = \pm j/(2RC)$, und zwei reelle Pole bei $\omega_x = (-1 \pm 4\sqrt{3})/(RC)$. Mit $C = 10\text{nF}$ und $R = 7960\Omega$ liegt die Nullstelle bei $f_0 = 1\text{kHz}$.

Die Verstärkung eines **Operationsverstärkers (OP)** ist in der Regel sehr hoch, aber nur bei ganz tiefen Frequenzen (**Abb. 14**). Bei vielen OPs nimmt oberhalb der tiefsten Grenzfrequenz das Verstärkungsmaß mit 20dB/Dek ab, aber einige OPs weichen bei hohen Frequenzen von diesem Verhalten ab (im Bild LT-1028 und LM-318). Der Grund: wird der OP gegengekoppelt, kann es zu Eigenschwingungen kommen. Im rechten Bild ist zu erkennen, dass die Phase von 0° zu negativen Werten dreht, und knapp über 1 MHz -180° erreicht. Aus einer Gegenkopplung, d.h. einer gegenphasigen Signalrückführung, wird bei dieser Frequenz durch die zusätzliche Phasendrehung eine Mitkopplung. Und weil hier die Verstärkung (blau) noch größer als 1 ist, würde bei vollständiger Gegenkopplung der OP schwingen.

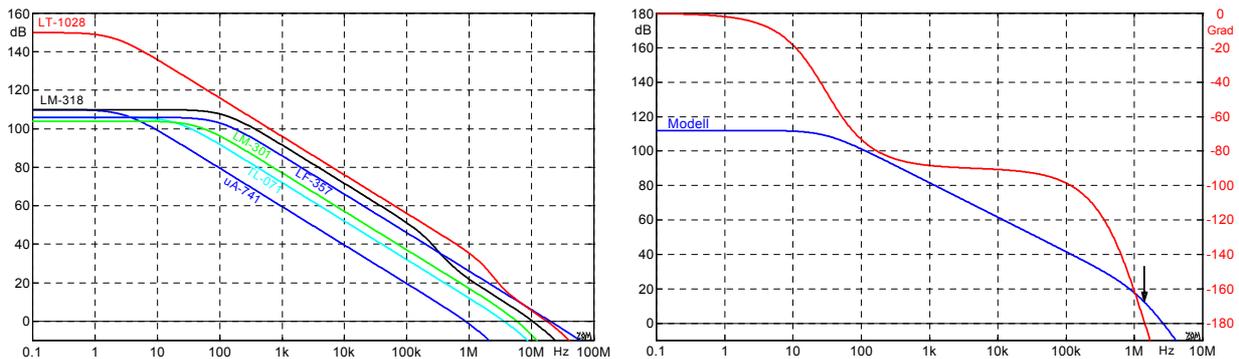


Abb. 14: Frequenzgänge einiger Operationsverstärker (links). Rechts ein Modell-Beispiel, rot = Phase.

Abb. 15 geht zunächst von einem weitgehend idealen OP aus: Seine Eingangswiderstände sind unendlich, sein Ausgangswiderstand (Innenwiderstand) ist null, jedoch ist seine Übertragungsfunktion \underline{v} nicht unendlich, sondern wie in Abb. 14 rechts definiert. Mit den beiden Widerständen stellt man die gewünschte Verstärkung ein, z.B. $H = 1000$. In diesem Fall wird nur $1/1000$ der Ausgangsspannung zurückgekoppelt, der OP ist stabil. Je weniger aber der OP verstärken soll, desto größer muss die Gegenkopplung sein. Und weil die bei hohen Frequenzen zur Mitkopplung wird, zeigt sich zuerst eine leichte Höhenüberhöhung (1 MHz), die mit zunehmender Rückkopplung immer stärker wird, bis bei $H = 4$ der OP zu schwingen beginnt.

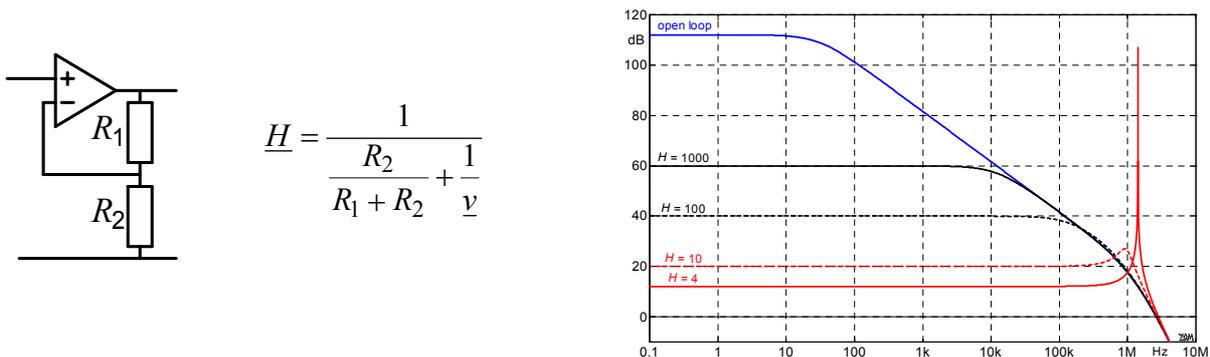


Abb. 15: Gegengekoppelter OP. Bei zu geringer Verstärkung (= zu starker Gegenkopplung) schwingt der OP.

Man könnte nun versucht sein, die HF-Schwingung mit einem kleinen Kondensator zu bekämpfen. Das kann funktionieren – es kann die Situation aber auch verschlechtern. Der OP-Innenwiderstand ist nämlich nicht null, sondern (je nach Typ) z.B. 200Ω . Eine kapazitive Belastung verursacht nun eine zusätzliche Phasendrehung, die (wenn ungünstige Umstände zusammentreffen) die Schwingneigung sogar noch verstärken kann. **Abb. 16** zeigt hierzu ein Beispiel, für das der OP-Innenwiderstand zu 200Ω angenommen wurde. Mit 500 pF Ausgangsbelastung, die auch von einem abgeschirmten Kabel kommen könnte, schwingt der OP.

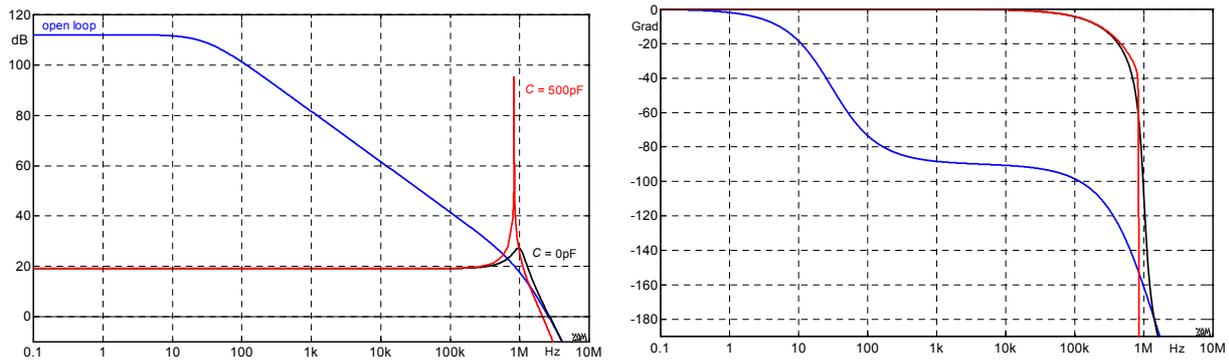


Abb. 16: Ein OP mit 200Ω Innenwiderstand, am Ausgang mit 500pF belastet; Betrag links, Phase rechts.

Die Lösung lautet also nicht, so lange kleine Kapazitäten in die Schaltung zu löten, bis die HF-Schwingung verschwunden ist, sondern die Schleifenverstärkung so zu dimensionieren, dass bei der **Schleifen-Transitfrequenz** f_{ST} ein ausreichender **Phasenrand** vorhanden ist. Die Schleifen-Transitfrequenz ist die Frequenz, bei der der Betrag der Schleifenverstärkung eins wird, der Phasenrand ϕ (Phasenreserve, phase margin) ist der Abstand zu 180° . Beträgt bei f_{ST} die Phasendrehung in der Schleife 180° (d.h. Phasenrand $\phi = 0^\circ$), schwingt die Schaltung. Es ist deshalb hilfreich, bei f_{ST} einen Phasenrand von ca. $\phi = 55^\circ$ bis 70° einzuhalten.

In Abb. 17 ist links das einfache Blockschaltbild dargestellt: Im Vorwärtszweig der OP mit der komplexen Übertragungsfunktion \underline{v} , im Rückkopplungszweig ein Spannungsteiler mit der (reellen oder komplexen) Übertragungsfunktion \underline{k} . In den rechts daneben stehenden Sprungantworten erkennt man, dass mit $k = 0.20$ (Betriebsverstärkung $H = 5$, bzw. 14dB) die Grenze zur Instabilität schon gefährlich nahe ist (der Phasenrand ist hierbei nur noch 6.4°).

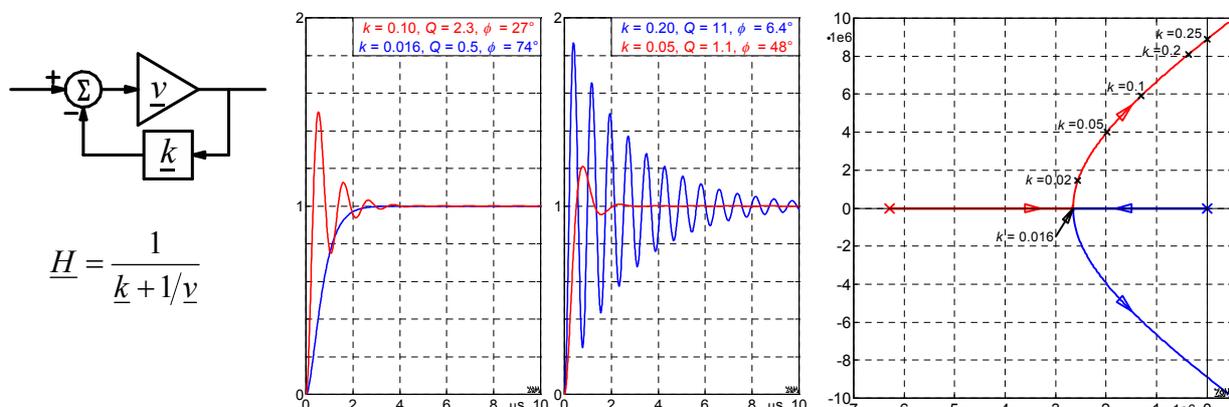


Abb. 17: Blockschaltbild, Sprungantworten, Pol-Ortskurven ($f_{x1} = 30\text{Hz}$, $f_{x2} = 1\text{MHz}$, $f_{x3} = 2\text{MHz}$, $v_0 = 4e5$).

Für $k = 0$ sind alle drei Pole der Übertragungsfunktion $\underline{H} = \underline{v}$ reell, sie wurden für das Beispiel wie im Bild angegeben definiert: $p_{x1} = -1/(2\pi f_{x1})$, $p_{x1} = -1/(2\pi f_{x1})$, $p_{x1} = -1/(2\pi f_{x1})$. Mit wachsendem k wandert der von f_{x3} gebildete Pol auf der negativen Abszisse der p -Ebene weiter nach links, die anderen beiden Pole wandern aufeinander zu, bis sie sich für $k = 0.016$ treffen. Für noch größere k -Werte werden diese beiden Pole konjugiert komplex, und bewegen sich – wie in Abb. 17 rechts dargestellt – auf die imaginäre Achse zu. Für $k = 0.25$, einer rechnerischen Verstärkung von 4 entsprechend, liegen sie auf der imaginären Achse. Damit ist das System **grenzstabil**, eine vorhandene Schwingung kann nicht mehr abklingen. Liegen die Pole auch nur minimal in der rechten p -Halbebene, schaukelt sich eine Eigenschwingung hoch, die im realen System nur durch das Clipping begrenzt wird. Das in jeder Schaltung vorhandene Eigenrauschen reicht aus, um eine derartige Schwingung zu starten.

Die Schwingneigung hängt von der **Schleifenverstärkung** ab, also vom Produkt aus \underline{v} und \underline{k} . Einige OPs ermöglichen (durch Zusatzbeschaltung) eine Veränderung von \underline{v} ; daneben bleibt nur die Optimierung von \underline{k} . Nun wird mit \underline{k} aber die Betriebsverstärkung festgelegt, z.B. auf 20dB, die Gegenkopplung darf also nur im allerobersten Frequenzbereich geändert werden, eben da, wo der OP schwingt. Wenn man z.B. R_2 in Abb. 15 mit einem kleinen Kondensator überbrückt, reduziert dies hochfrequent die Schleifenverstärkung. Oder doch lieber R_1 überbrücken, um die Betriebsverstärkung H zu reduzieren? **Abb. 18** zeigt die Auswirkungen der beiden Maßnahmen. Wenn auch nur 10pF zu R_1 (80.3k Ω) bzw. R_2 (10k Ω) hinzukommen, verschlechtert sich die Situation. 10pF ist ein sehr kleiner Wert, der oft schon im Aufbau begründet ist: parallele Leiterbahnen auf der Platine, nahe zusammenliegende Drähte, oder einfach aneinanderliegende Bauteile, und schon entsteht eine kleine Kapazität, die im Schaltplan (und folglich in der Berechnung) nicht enthalten ist. Und dann schwingt die Schaltung, obwohl sie doch lt. Theorie stabil sein sollte.

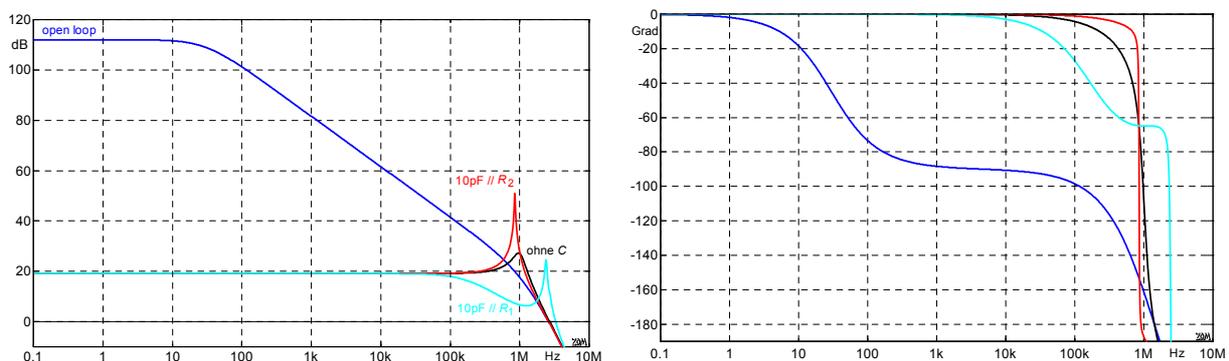


Abb. 18: Eine kleine Kapazität in der Gegenkopplung; Betrag links, Phase rechts.

Die bessere Variante zeigt **Abb. 19**: Schaltet man parallel zu R_1 eine Reihenschaltung aus 1.4pF und 20k Ω , ergibt sich die grüne Kurve – perfekt stabil. Eine Parallelschaltung zu R_2 kann die Stabilität hingegen verschlechtern (magenta). Bei nur 1.4pF gilt das oben Gesagte natürlich in verschärfter Form: Derart kleine Kapazitäten werden immer durch den Aufbau verändert, weswegen neben der Berechnung auch eine Analyse der tatsächlichen Schaltungsrealisierung erfolgen muss. Die übliche Methode ist das Auswerten der Sprung- bzw. Rechteckantwort: Zeigt sie kein oder nur wenig Über- bzw. Nachschwingen (vergl. Abb. 17), ist das System ausreichend stabil. Jedoch ist Sorge zu tragen, dass das Systemverhalten durch die Messung nicht verfälscht wird. Wenn die Schaltung empfindlich auf kapazitive Belastung reagiert, muss das Messgerät ggf. über einen sehr hochohmigen und kapazitätsarmen Tastkopf angeschlossen werden.

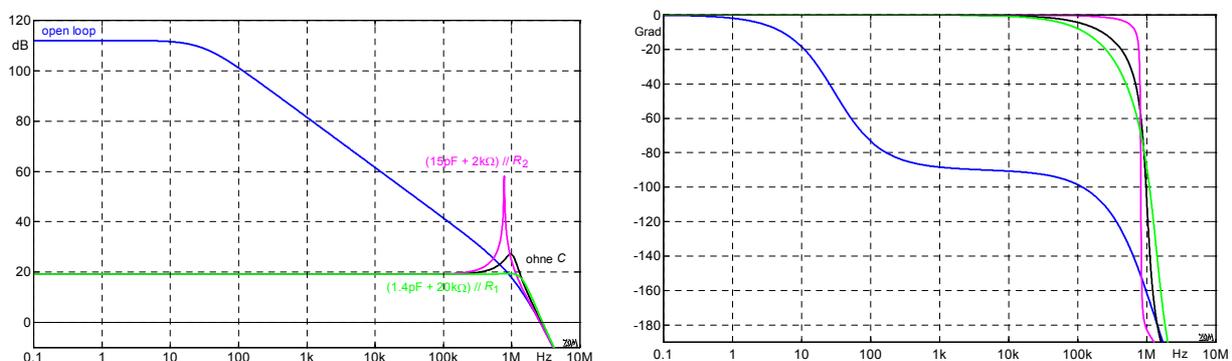


Abb. 19: Gegengekoppelter OP mit RC-Kompensation; Betrag links, Phase rechts.

Als Letztes sei noch kurz an die **Slewrate** erinnert. Die Slewrate SR gibt die maximale Steigung dU/dt an, mit der sich die Ausgangsspannung des OPs ändern kann. Das schwach gedämpfte Überschwingen in Abb. 17 ($k = 0.20$) erfolgt mit maximal $74 \text{ V}/\mu\text{s}$ (**Abb. 20**). Das ist schnell; ein OP wie z.B. der LF-356 ist mit seinen maximal $12 \text{ V}/\mu\text{s}$ dazu nicht in der Lage. Reduziert man aber die Aussteuerung auf $1/10$ wie im rechten Bild, verringert sich die Slewrate im selben Maße. Das Überschwingen ist (solange noch keine Dauerschwingung vorliegt) ein linearer Vorgang, Slewrate-Begrenzungen sind demgegenüber nichtlinear. Es empfiehlt sich also, derartige Messungen mit verschiedenen Aussteuerungen durchzuführen.

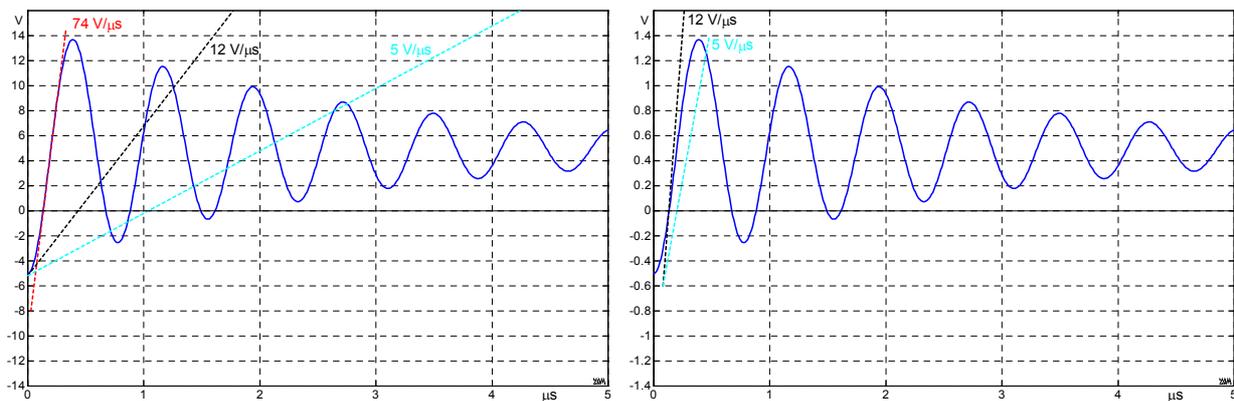


Abb. 20: Vergrößerte Rechteck-Antworten (vergl. Abb. 15, $k = 0.20$), mit Slewrate-Geraden.

Typ	OP07	UA741	OP227	LF355	HA5170	NE5532	LT1028	TL071	LF357	AD840
$\text{V}/\mu\text{s}$	0.1	0.5	3.0	5.0	8.0	9.0	11	13	50	400

Tabelle: Slewrate-Daten einiger Operationsverstärker.

Literatur:

- [1] Zollner M.: **Signalverarbeitung**, Bibliothek der OTH Regensburg, 2009, ausleihbar.
- [2] Möller Franz et. al.: Grundlagen der Elektrotechnik, Springer, 2013.

Fachartikel in www.gitarrenphysik.de 1 Gitarren-Lautsprecher 2 Studio-Lautsprecher 3 Welche ECC83 darf's denn sein? 4 Reamping and Reguitaring 5 Gitterstrom bei Trioden 6 Der Verzerrer 7 Der Range-Master rauscht 8 Raumakustik 9 Saitenalterung 10 Lautsprecherkabel 11 Schaltungsvarianten für das Reguitaring 12 Verzerrungen: gerade oder ungerade? 13 Die Basswiedergabe beim Studio-Monitor 14 Vom Sinn und Unsinn der CSD-Wasserfälle 15 Artefakte bei Wasserfall-Spektrogrammen 16 Equalizer und Allpässe, Teil 1 – 3 17 Studio- und Messmikrofone, Teil 1 – 5 18 Die Dummy-Load als Lautsprecher-Ersatz 19 Nichtlineare Modelle 20 Wie misst man Elkos?	21 Der Lautsprecher-Phasengang 22 Negative Gruppenlaufzeit 23 Der LDR als steuerbarer Widerstand 24 Steuerbare Allpässe – Uni-Vibe & Co. 25 Der JFET als steuerbarer Widerstand 26 Messdaten eines Nahfeld-Monitors 27 Bündelung: Studio- und Heimlautsprecher 28 Bündelung: Hörner 29 Bündelung: Instrumentallautsprecher 30 Lautsprecher-Parameter: Datensammlung 31 Lautsprecher-Parameter: Messverfahren 32 Lautsprecher-Parameter: Strahlungsimpedanz 33 Bundhöhen 34 Federhall-Systeme 35 Alnicomagnet-Tonabnehmer 36 Der Lace "Holy Grail" 37 Batterien für Effektgeräte 38 Verzerrungsarme RC-Generatoren 39 Millivoltmeter mit echter RMS-Anzeige 40 Einfache RC-Schaltungen
---	--