О терминологии и понятийной структуре обработки данных с интервальной неопределённостью

А.Н. Баженов, С.И. Жилин, С.И. Кумков, С.П. Шарый

26 марта 2021 г.

Аннотация

Аннотация...

Ключевые слова: измерение, неопределённость, интервальный анализ.

1 Введение

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы представить научному сообществу проект внутренне согласованной системы понятий и терминов, относящихся к обработке данных, которые имеют интервальную неопределённость (или, более общо, ограниченную по величине неопределённость), в рамках так называемой статистики интервальных данных или, кратко, "интервальной статистики". Возникнув в последние десятилетия XX века как альтернатива традиционной "вероятностной статистике", основанной на методах теории вероятностей, это научное направление вскоре сделалось важным и практически востребованным. Его интенсивное развитие вызвало к жизни необходимость введения различных понятий, обозначений, конструкций и т. п., которые не всегда согласовывались друг с другом. К настоящему моменту возникла настоятельная необходимость унификации понятий, терминов и обозначений в этой научной области, чтобы специалисты могли лучше понимать друг друга и были понятными для тех, кто применяет методы обработки интервальных данных.

Помимо статистических понятий и конструкций мы по необходимости рассматриваем многое из того, что обычно относится к области метрологии — понятия измерения, результаты измерений и погрешности, базовые методы их обработки. Это совершенно неизбежно при введении нового интервального типа данных для результатов измерений.

В практике обработки экспериментальных данных сейчас повсеместно используются статистические методы, основанные на идеях и результатах теории вероятностей (см., например, [12, 13, 34, 35, 36]). Эти подходы опираются на использование допущений о вероятностных свойствах погрешностей измерений и наличие выборок представительной длины (как минимум, в несколько десятков измерений). Однако практики часто сталкиваются с ситуациями, когда выборки измерений коротки (например, не более 20–30 или даже не более десятка), а погрешности измерений не могут быть адекватно описаны с помощью инструментов теории вероятностей или же информация о вероятностных характеристиках погрешностей отсутствует. В этих условиях погрешности и неопределённости измерений нужно описывать и обрабатывать уже по-другому. В частности, для анализа данных можно применить методы "интервальной статистики", основанные на идеях и результатах интервального анализа, использующие его подходы, алгоритмы и соответствующее программное обеспечение.

Напомним, что *интервалом* вещественной оси называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами, включая их самих. Интервалы, таким образом, дают одну из форм представления целых диапазонов значений интересующих нас величин, и в этом качестве интервалы, главным образом, и используются в других дисциплинах и практических приложениях. Интервальный анализ — это исчисление интервалов, т. е. наука о том, как оперировать с ними наподобие того, как мы делаем это с обычными числами, и затем использовать построенную технику для решения различных задач, где интервалы встречаются в виде данных, входных или промежуточных.

Интервальный анализ возник в середине XX века в связи с бурным развитием компьютерных вычислений, в которых требовалось строго и аккуратно оценивать эффект от замены точных значений на приближённые. Сам термин "интервальный анализ" был введён американцем Р.Э. Муром в начале 60-х годов прошлого века, но он лишь удачно завершил оформление нового научного направления, которое реально зародилось несколькими десятилетиями ранее. В его становление внесли свой вклад многие исследователи (см, например, [1, 37, 38, 39, 40]). В настоящее время интервальный анализ является развитой математической дисциплиной со своим кругом задач и своими специфическими методами, проникающими во многие прикладные отрасли знаний. Но терминология интервальной статистики — интервальных методов обработки данных — по необходимости наследует многое из традиционной статистики, где сложился развитый понятийный аппарат, который можно и нужно использовать в новых условиях.

Содержание статьи предназначено, прежде всего, для широкого круга пользователей — прикладников, инженеров и техников, которым в своей работе приходится иметь дело с информацией, содержащей интервальные неопределённости.

2 Краткий критический обзор методов статистики и обработки данных

Статистика — древнейшая наука об обработке данных, которая возникла на заре человеческой цивилизации. В широком смысле, например, согласно "Малой Советской Энциклопедии" [3], *статистика* — это "отрасль знаний, в которой излагаются общие вопросы сбора, измерения и анализа массовых статистических (количественных или качественных) данных …".

Но на практике данные почти всегда неточны, поскольку в процессе их получения на результаты измерений и наблюдений влияют внешние неконтролируемые факторы, сами измерительные приборы не являются абсолютно точными т. д. и т. п. Таким образом, реально мы должны иметь дело с той или иной неопределённостью — состоянием частичного знания об измеряемой величине, когда нам известно какое-то её значение, но оно приближённое, и имеется также некоторая информация (качественная и количественная) о погрешности этого значения.

Неопределённости и неточности являются неотъемлемой частью развитых математических моделей реальности и могут порождаться различными причинами, классификация которых неоднократно рассматривалась в литературе (см., например, [15, 19]).

На результаты измерений могут оказывать влияние вариабельность (изменчивость) самих измеряемых величин, их непостоянство во времени или пространстве. Измерения могут выполняться в условиях неблагоприятной среды, когда на них оказывают влияние внешние неконтролируемые факторы, так называемые "шумы" и случайные воздействия. Измерения могут быть осложнены наличием в приборе или измерительной системе систематической погрешности (неточным базисным уровнем, постоянной помехой и т. п.). В процессе обработки данных с помощью численных алгоритмов на результат могут влиять неизбежные неточности расчётов на ЭВМ (ошибки представления и округления и т. п.).

Если некоторая величина, входящая в математическую модель, является прогнозным значением, т. е. устанавливается на основе прежнего опыта или в результате процедуры предсказания, то у нас просто может не быть данных для её определения. Но даже если данных достаточно, то всякая процедура предсказания неточна и результат её имеет неопределённость. Процедура прогноза может отягощаться методическими ошибками, а необходимые для её проведения вычисления могут давать не вполне правильные результаты из-за погрешностей округления, ошибок дискретизации и т. п. С другой стороны, даже при наличии данных процедура предсказания или прогноза существенно зависит от полноты этих данных, их достаточной "представительности", в отсутствие которой результат прогноза может быть весьма неточен. В этом случае часто говорят о "неполноте информации", на которой основан прогноз.

Наконец, математические модели могут опираться на значения некоторых экспертных оценок, и они тоже могут иметь неопределённость, неточность и неоднозначность. Эти оценки подвержены влиянию как субъективных факторов, так и объективных. К первым можно отнести ограниченную компетенцию экспертов, незнание ими всех тонкостей и деталей рассматриваемого вопроса. Объективные факторы — это невозможность учёта всех деталей и тонкостей рассматриваемого явления. Сюда же могут быть отнесены технические трудности, в частности, ошибки округления представляемых значений.

Как описывать эти погрешности? Иными словами, какую "модель неопределённости" данных мы принимаем? Популярный выбор — это теоретико-вероятностная модель погрешностей, основы которой заложили на рубеже XVIII и XIX веков К.Ф. Гаусс и П.С. Лаплас. Согласно этому подходу погрешности измерений и наблюдений являются случайными величинами, адекватно описываемыми математическим аппаратом теории вероятностей, и нам (более или менее) известны характеристики этих случайных величин. Теоретико-вероятностная модель погрешностей за прошедшие два века получила очень большое развитие и распространение, сделавшись одним из основных инструментов обработки данных. Тем не менее, её применение вызывает необходимость отвечать на многие нетривиальные вопросы, и эти ответы подчас не вполне удовлетворительны.

Ниже мы конспективно перечислим некоторые из проблем, возникающих при применении теоретико-вероятностных методов в статистике. Для краткости мы будем называть их "вероятностной статистикой". Наш короткий обзор естественно дополняет работы [6, 8, 7, 9, 17, 18, 19], где читатель также может найти обсуждение проблем и трудностей вероятностной статистики.

Статистическая устойчивость. Прежде всего, мы должны принимать во внимание тот факт, что в основе самого понятия вероятности лежит так называемая частотная интерпретация, при которой вероятность того или иного события понимается как отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов рассматриваемого явления (эксперимента и т. п.), либо близкая к ней конструкция. Несмотря на то, что в современной теории вероятностей, построенной на аксиоматике А.Н. Колмогорова, математическая вероятность определяется как некоторая специальная мера на множестве событий, она формализует именно частотное понимание вероятности. Наконец, именно частотная интерпретация вероятности является основой всех приложений теории вероятностей к практике (см., например, [5]). Существование подобной частоты, как объективной характеристики реальных явлений и процессов, является фундаментом самого существования теории вероятностей и залогом её успешного применения к моделированию окружающего нас мира. Но важно осознавать, что эта модель не универсальна, она является определённой идеализацией, имеющей свою сферу применимости, весьма широкую, но всё-таки ограниченную.

Многие явления окружающего нас мира, в отношении которых вполне применим общепринятый термин “случайный”, не обладают свойством существования устойчивой частоты, так как при росте числа наблюдений их относительная частота не устанавливается, а имеет тенденцию к постоянным колебаниям (см., например, [10, 11]). Для описания и анализа подобных явлений традиционная теория вероятностей непригодна. Свойство существования относительной частоты событий и установления к ней частоты, наблюдаемой в конечных экспериментах, называется *статистической устойчивостью* (иногда также “статистической однородностью”). Часто саму теорию вероятностей определяют как “математическую теорию статистически устойчивых явлений” (так делается, к примеру, в классической книге [4]).

Так или иначе, если нет статистической устойчивости, теоретико-вероятностные конструкции напрямую применять к решению задачи нельзя. В этом случае и традиционная математическая статистика, основанная на теории вероятностей, также не может служить подходящим инструментом для обработки данных.

Проблема малых выборок. Вероятностные закономерности проявляются как тенденции, которые наиболее ярко видны для массовых явлений. При малом или небольшом количестве испытаний выводы теории вероятностей могут оказаться весьма далёкими от истинной картины явления, и это составляет “проблему малых выборок” в вероятностной статистике. Фактически, при обработке экспериментальных данных почти всегда стоит вопрос о том, достаточен ли объём выборки (количество измерений и т. п.) для того, чтобы выводы, получаемые на основе теоретико-вероятностной модели погрешностей, имели приемлемую практическую достоверность. Связанный с этим вопрос: какие методы следует применять для обработки выборок, являющихся “малыми”, где теория вероятностей не способна адекватно описать поведение погрешностей?

В частности, существующие стандарты и методики обработки экспериментальных данных (см. [12, 13]) регламентируют способы работы с выборками размера лишь более 15. При этом результаты обработки выборок размера от 16 до 50 рекомендуется рассматривать как не очень надёжные и сопровождать оговорками, а обработка выборок размером не более чем из 15 измерений стандартами вообще не рассматривается. Тем не менее, в практике измерений они встречаются часто.

Неизвестные вероятностные характеристики распределения. Если законы теории вероятностей применимы к анализу погрешностей, то каков конкретный вид вероятностных распределений погрешностей? Каковы его числовые характеристики? Это непростые вопросы, на которые не всегда можно хоть как-то ответить на практике. Например, считается, что типичным законом вероятностного распределения погрешностей является нормальное гауссовское распределение. Но на практике реальное распределение погрешностей измерений может сильно отличаться от нормального гауссовского (см. [14, 20]), и это особенно характерно для электрических измерений.

Ещё одна группа вопросов из этого пункта касается часто используемых в теории вероятностей понятий *независимости* и *корреляции* случайных величин. Имеют ли данные корреляцию между собой? Или же они независимы? Многие классические результаты вероятностной статистики требуют, как известно, независимости рассматриваемых случайных величин, представляющих результаты измерений, либо заданного уровня их корреляции. Проверка этих условий на практике почти невозможна. В частности, независимость величин при применении теоретико-вероятностных моделей либо постулируют (“так должно быть”), либо выводят из физических свойств рассматриваемого объекта или явления (“эти параметры не могут влиять сильно друг на друга в силу особенностей конструкции и функционирования системы, поэтому они независимы”).

“Робастность” модели обработки данных. Под этим требованием понимается адекватная устойчивость оценок, получаемых на основе тех или иных моделей, к малым возмущениям в данных, т. е. к вероятностным характеристикам распределений, их форме и параметрам. Некоторые вероятностно-статистические методы не обладают этим свойством, давая ответы, чувствительность которых к возмущениям в данных неразумно велика.

Удобство вычислительных методов. Насколько удобны и практичны вычислительные технологии для решения соответствующих задач статистики? Некоторые традиционные методы вероятностной статистики вполне удовлетворяют этому условию. Например, широчайшее распространение метода наименьших квадратов в задачах обработки данных обусловлено, помимо ясного теоретико-вероятностного смысла, ещё также его удобной вычислительной схемой: в линейном случае решение задачи наименьших квадратов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Но в более сложных ситуациях методы вероятностной статистики технологической простотой уже не обладают (например, тот же самый метод наименьших квадратов в случае нелинейной зависимости). Это повышает “конкурентоспособность” альтернативных подходов к обработке данных.

Неоднозначность теоретико-вероятностных методик. Некоторые из популярных понятий и методов вероятностной статистики носят неочевидный и неоднозначный характер, так что их практическое применение вызывает большие вопросы. Это относится, в частности, к популярному понятию статистической значимости, по поводу которого в последние годы вспыхнула оживлённая дискуссия [74, 75].

Сюда же можно отнести проблему «тяжёлых хвостов» вероятностных распределений. Носители большинства распределений, используемых в теории вероятностей, бесконечны, что противоречит физическому смыслу и реальности

Затронутые нами вопросы поднимались в многолетней дискуссии по вопросам применимости и адекватности теоретико-вероятностных методов в статистике, состоявшейся в Советском Союзе в 70–90-е годы XX века. Она была инициирована Ю.И. Алимовым (см., в частности, [6]), а со стороны специалистов по теории вероятностей ему противостоял В.Н. Тутубалин (см., в частности [7]). Итоги дискуссии были подведены в двух заключительных публикациях [8, 9], которые содержат ценнейшие мысли взаимном соотношении статистики и теории вероятностей.

Альтернативы вероятностной статистике. При неудовлетворённости теоретико-вероятностным описанием погрешностей часто удобнее работать с альтернативными моделями представления неопределённостей и неточностей в данных. В настоящее время предложено и развивается несколько таких моделей, и главные и наиболее популярные из них основаны на методах интервального анализа или теории нечётких множеств.

Интервальной неопределённостью назовем состояние частичного знания о величине, которая не известна точно, но известны нижняя и верхняя границы её возможных значений, или, иными словами, известен интервал возможных значений этой величины. В интервальном описании вместо вероятностных распределений мы считаем заданными интервальные оценки результатов измерений, т. е. нижние и верхние границы возможных значений измеряемой величины. В многомерном случае областями возможных значений неопределённой величины могут быть брусы, многогранники, параллелотопы (зонотопы), эллипсоиды и прочие объекты.

Во втором случае, при нечётком описании, мы полагаем, что нам известны так называемые функции принадлежности нечётких чисел (Рис. 2.1.), возникающих в результате измерений [15].

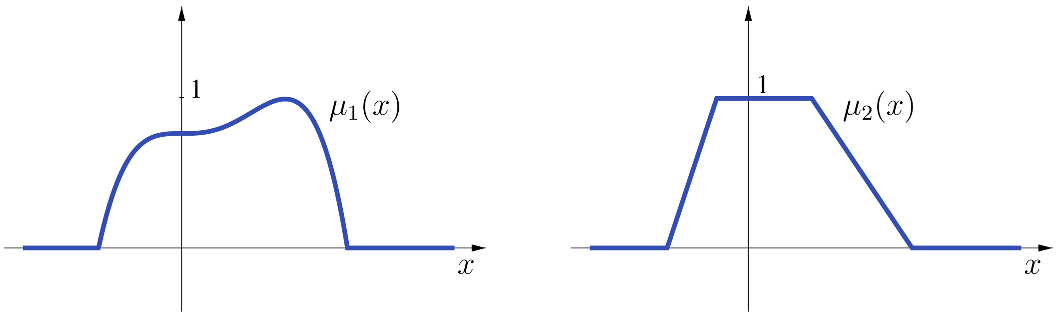

Рис. 2.1: Нечёткие числа μ_1 и μ_2 с их функциями принадлежности $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$.

Напомним, что *нечётким множеством* называется множество X элементов произвольной природы, дополненное так называемой *функцией принадлежности* $\mu : X \to [0, 1]$, значение которой $\mu(x)$ на элементе $x \in X$ показывает "степень принадлежности" x множеству X (Рис. 2.1). У стандартной функции принадлежности множества (называемой также *индикаторной функцией* множества) значения могут быть равны только 0 или 1, так что допущение для функции μ непрерывного ряда значений из интервала $[0, 1]$ позволяет характеризовать ситуации, когда мы не вполне уверены в принадлежности элемента множеству, оперировать количественной мерой этой уверенности и строить на этой основе наши выводы и заключения.

Для построения содержательной теории нечёткого вывода и нечётких неопределённостей обычно ограничивают общность функции принадлежности μ, требуя, чтобы она была *квазивогнутой*. Напомним, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется квазивогнутой, если для любых аргументов x, y и всякого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$f\bigl(\lambda x + (1 - \lambda)y\bigr) \geq \min\bigl\{f(x), f(y)\bigr\}.$$

Можно показать, что выписанное условие равносильно тому, что все множества уровня $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \alpha\}$ функции f являются выпуклыми. В одномерном случае они являются интервалами. Нечёткие множества с квазивогнутыми функциями принадлежности называются *нечёткими числами*, и они могут быть эквивалентным образом заданы как семейства вложенных друг в друга интервалов, которые соответствуют различными уровням принадлежности.

Нечёткое или размытое описание неопределённости является одной из возможных альтернатив вероятностному описанию в тех ситуациях, когда мы не можем разумно задать или определить вероятностную функцию распределения случайной величины. Для обработки данных, имеющих нечёткую неопределённость, построены различные подходы (см. [15]), в частности, большое развитие получили методы восстановления зависимостей по нечётким данным.

Почему интервалы? В чём преимущества и недостатки интервалов в сравнении с другими способами описания неопределённости? Это очень содержательный и важный вопрос, ответ на который мы здесь кратко наметим. Имеется две больших причины, по которым интервалы нужны и важны при обработке данных.

Во-первых, интервалы являются удобным средством описания и представления популярного типа неопределённостей, часто встречающихся в реальной жизни — ограниченных по величине неопределённостей. Интервалы проще, чем вероятностные распределения или нечёткие множества. Для описания одномерного интервала нужно всего два числа (левый и правый концы или середина и радиус, см. §3), тогда как для описания распределения вероятностей или нечёткого множества нужно задать функции, т. е. существенно больше значений. Интервал — это «бесструктурный объект», который более беден в своих выразительных возможностях, в описании деталей неопределённости, чем вероятностное распределение или нечёткое множество. Но следствием этой "бедности" является лучшая развитость теории интервального анализа и интервальных вычислительных методов. Кроме того, интервалы и интервальные арифметики оказываются замечательными (или даже уникальными) во многих отношениях, в частности, в отношении их алгебраических свойств.

Ещё один аргумент за использование интервалов в этом качестве состоит в том, что они являются предельным случаем сумм независимых ограниченных величин. В большинстве практических ситуаций погрешность измерения возникает в результате накопления и наложения большого количества независимых факторов. Оказывается, что если некоторая величина есть сумма большого количества малых независимых слагаемых, то множество всевозможных значений этой величины близко к интервалу, причем чем меньше значимость (вклад) суммируемых компонент, тем меньше отличие результата от непрерывного интервала. То есть, возможные «дырки» между отдельными компонентами связности таких сумм «затягиваются», так что результирующее множество становится "всё более связным" и всё более близким к интервалу. Этот результат составляет содержание "предельной теоремы Крейновича" и её обобщений, и подробности читатель может увидеть в [38].

Вторая причина состоит в том, что некоторые физические величины принципиально не могут быть выражены точечными значениями, но лишь интервалами. Поэтому интервалы представляют собой новый удобный тип данных, которым уместно дополнить те элементарные типы данных, которые уже используются в метрологии.

Пример 2.1. С 2009 года атомные веса некоторых элементов в периодической системе химических элементов Д.И. Менделеева стали выражаться интервалами [55]. Это событие стало итогом длительного, продолжительностью более полувека, процесса осознания химиками неизбежной и неустранимой изменчивости величины атомных масс элементов в зависимости от того, где и как взята их проба. С середины XX века вместе с развитием измерительной техники и экспериментальных методик постепенно стало ясно, что различие результатов измерений атомных масс в различных пробах веществ носит принципиальный характер.

Дело в том, что почти каждый химический элемент представлен в природе смесью своих изотопов, т. е. разновидностями атомов, сходных по своим химическим свойствам (структуре электронных оболочек), но отличающиеся массой ядер. И относительная доля различных изотопов существенно меняется в зависимости от места и характера взятия пробы. Например, в тканях живых организмов преобладают более лёгкие изотопы химических элементов, нежели в неживой природе. Отличаются друг от друга относительные доли изотопов элементов на суше и в морях и т. п.

В периодической таблице Менделеева, поддерживаемой Международным союзом теоретической и прикладной химии IUPAC приводятся интервальные границы стабильных изотопов химических элементов. Например, для кислорода, имеющего 3 изотопа с атомными массами 16, 17 и 18 на стр. 1858 статьи [55] приводятся данные, часть которых представлена в Табл. 2.1.

Таблица 2.1: Стабильные изотопы кислорода.

Стабильный изотоп	Молярная доля
^{16}O	[0.997 38, 0.997 76]
^{17}O	[0.000 367, 0.000 400]
^{18}O	[0.001 87, 0.002 22]

Для каждого стабильного изотопа приведены границы, в пределах которых данный изотоп встречается в различных породах, атмосфере, водной среде в различных местах Земли. Подробные сведения приводятся на рисунках 4.8.1-4.8.3 из работы [55].

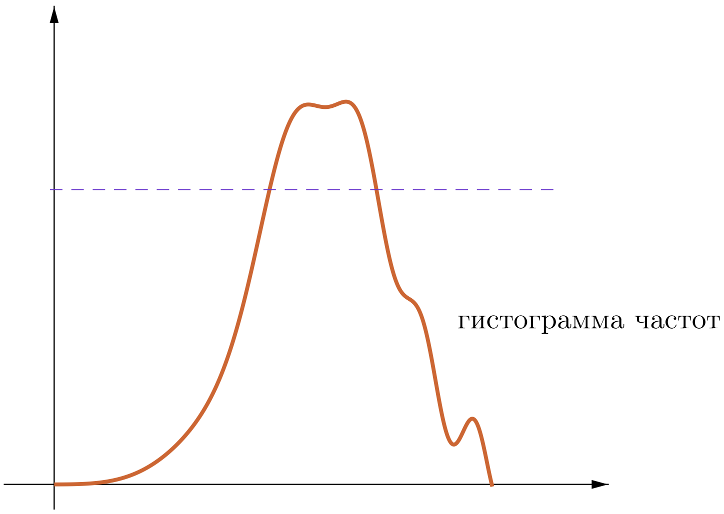

Рис. 2.2: Как образуется интервал атомных весов элемента.

Первоначально в 2009 году интервалы атомных весов были назначены для 10 химических элементов, но далее в 2013 и 2016 годах работа по "интервализации" продолжилась, и теперь в периодической таблице Д.И. Менделеева имеется 13 элементов, атомные веса которых выражаются интервалами. Среди них — такие широко распространённые и важные элементы как водород, углерод, азот, кислород, кремний, сера и др. Интервалы дают двусторонние границы значений атомного веса для любой пробы "нормального материала" включающего эти элементы. При этом особо подчёркивается [55], что внутри заданных интервалов не предполагается наличия какого-либо вероятностного распределения.

Описание того, как получаются там эти интервалы представлено на Рис. 2.2. ■

Ранняя терминология. В работах 80–90-х годов для обозначения рассматриваемого нами подхода к обработке интервальных данных очень часто использовался (в том числе и некоторыми авторами настоящей статьи) термин "нестатистический подход к анализу данных" (см., к примеру, [16, 17, 45]). Как было осознано впоследствии, он не слишком удачен для наименования методов анализа и обработки данных с интервальными (ограниченными) неопределённостями.

Прежде всего, отрицание, как способ организации определения, не вполне продуктивен, поскольку не даёт позитивного (конструктивного) определения понятия. Термин "нестатистический" обозначает, каким подход не является, но не даёт понять, каким же он является и в чём состоит.

Но главный недостаток эпитета "нестатистический" состоит в том, что он противоречит содержанию термина "статистика", как в широком (см. определение в начале раздела), так и в узком смысле. Напомним, что в узком смысле (согласно "Математической энциклопедии" [2]) *статистика* — это некоторая функция от результатов наблюдений, например, выборочное среднее данных измерений.

Приёмы обработки интервальных данных, развиваемые в нашей работе и многих других, также относятся к статистике, которая не опирается на теорию вероятностей, но статистикой быть не перестаёт. Анализ и обработка интервальных данных — это тоже ветвь большой науки статистики, возникшая в XX веке, и термин "нестатистический" в отношении её методов и моделей отражал лишь ошибочное отождествление всей статистики вообще с вероятностной статистикой. Аналогично и с термином "статистика" в узком смысле, его отрицание имеет ещё меньше смысла.

Эквивалентные англоязычные термины, обозначающие эту область знаний — analysis of data with unknown-but-bounded errors (анализ данных с неизвестной, но ограниченной погрешностью), set membership estimation, set theoretic estimation (теоретико-множественное оценивание); см. [39].

Известно, что в конце 60-х – начале 70-х годов XX века Дж. Тьюки предложил термин "анализ данных" для обозначения тех способов и методик обработки данных, которые не могут быть уложены в жёсткое "прокрустово ложе" теоретико-вероятностных методов. Термин привился и ныне широко используется, но, на наш взгляд, проблему адекватного наполнения понятия "математическая статистика" нужно решать принципиально. По этой причине мы сознательно оперируем оборотами "интервальная статистика" и "статистика интервальных данных" и хотим, чтобы они укоренились в научном языке.

Место и особенности рассматриваемого подхода. Существуют исследования, в которых рассматриваются интервальные неопределённости измерений (наблюдений), но в рамках теоретико-вероятностных моделей реальности (см. [21, 22, 23, 24]). При этом тоже говорится об «интервальной статистике» и «статистике интервальных данных». Напротив, в этой статье мы рассматриваем ситуацию, когда аппарат теории вероятностей не применим к описанию погрешностей измерений. Соответственно, методы вероятностной статистики, рекомендуемые стандартами [34, 35], тогда не работают. Возможно лишь их формальное использование, которое может приводить к некорректным результатам и недостоверным выводам.

В настоящей статье рассматривается подход к обработке данных, имеющих интервальную или, более общо, ограниченную неопределённость и основанный на методах интервального анализа, с использованием специальных программных средств и ЭВМ. Мы представляем систему понятий, обозначений и т. п., относящуюся к этому подходу, которая призвана стать общей понятийной базой для исследований и работ в этой области.

Отметим, что отличительной чертой представляемого подхода является его применимость к выборкам любого объёма, начиная с нескольких измерений (в предельном случае — одного). Как следствие, проблемы "малых выборок", характерной для вероятностной статистики, для интервального подхода вообще не существует. Это свойство особенно ценно в случаях, когда технические или экономические причины не позволяют проводить много экспериментов. В частности, такова ситуация с алгоритмами обработки результатов разрушающих измерений или измерений быстропротекающих процессов в реальном масштабе времени.

Основанием для подобной всеядности интервальных методов служит тот факт, они не опираются на теорию вероятностей, закономерности которой выявляются в массовых явлениях, длинных выборках и т. п. Если массовости нет, то, как мы отмечали ранее, и теория вероятностей не работает. Интервальные методы имеют *аппроксимативный* характер, т. е. осуществляют приближение данных в нужном нам смысле. Соответственно, для их применимости никакой массовости не требуется.

Для выборок большого объема, которые производятся в отношении процессов, адекватно описываемых теорией вероятностей, т. е. в традиционной ситуации, методы вероятностной статистики дают, как правило, более точные результаты, чем интервальные методы обработки данных (см., к примеру, [45]). Дело в том, что статистические методы, использующие теорию вероятностей, аккуратно учитывают частоту повторяемости тех или иных значений измеряемой величины, а интервальные методы никак её не используют. Но если теория вероятностей по каким-либо причинам не приложима к рассматриваемым большим выборкам данных, то интервальные методы снова могут выйти на первые роли и оказать услугу в решении подобных задач.

3 Базовые понятия и конструкции

Предметом этого раздела статьи является введение базовых понятий и математического аппарата, относящихся к обработке интервальных данных.

Определение 3.1. *Интервалом $[a, b]$ вещественной оси $\mathbb{R}$ называется множество всех чисел, расположенных между заданными числами a и b, включая их самих, т. е.*

$$[a, b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}.$$

При этом a и b называются концами интервала $[a, b]$, левым (или нижним) и правым (или верхним) соответственно.

Аналогичные термины, которые часто используются в математических текстах, — это *числовой промежуток* (замкнутый), *отрезок*, *сегмент* вещественной оси. Мы всюду используем термин *интервал*, так как именно он дал название интервальному анализу, т. е. той дисциплине, которая легла в основу математических методов обработки данных с ограниченной неопределённостью.

Множество всех интервалов из $\mathbb{R}$ обозначается символом $\mathbb{IR}$. В противоположность интервалам и интервальным величинам мы будем называть *точечными* те величины, значениями которых являются отдельные точки — вещественной оси, плоскости или, более общо, какого-либо пространства. Само множество вещественных чисел можно рассматривать как подмножество множества интервалов, т. е. как интервалы с совпадающими концами. Их обычно называют *вырожденными интервалами*. Итак, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{IR}$.

Наша система обозначений следует неформальному международному стандарту на обозначения в интервальном анализе, выработанному в 2002–2010 годах [41]. В частности, интервалы и другие интервальные величины (векторы, матрицы и др.) всюду в тексте обозначаются жирным математическим шрифтом, например, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\ldots$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, тогда как неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Для интервала $\boldsymbol{a}$ посредством $\underline{\boldsymbol{a}}$ или $\inf \boldsymbol{a}$ обозначается его левый конец, тогда как $\overline{\boldsymbol{a}}$ или $\sup \boldsymbol{a}$ — это его правый конец. В целом, $\boldsymbol{a} = [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}]$, так что

$$\boldsymbol{a} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \underline{\boldsymbol{a}} \leq x \leq \overline{\boldsymbol{a}} \,\}. \tag{3.1}$$

Характеристики интервала. Любой интервал полностью задаётся двумя числами — своими концами, но на практике широко используются также другие характеристики интервалов и представления интервалов на их основе.

Важнейшими характеристиками интервала являются его *середина* (центр)

$$\operatorname{mid} \boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}}),$$

и его *радиус*

$$\operatorname{rad} \boldsymbol{a} = \tfrac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}).$$

Нередко вместо радиуса рассматривается эквивалентное понятие *ширины* интервала

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}}.$$

В целом, $\boldsymbol{a} = \operatorname{mid} \boldsymbol{a} + [-1, 1] \cdot \operatorname{rad} \boldsymbol{a}$, что равносильно представлению

$$\boldsymbol{a} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x - \operatorname{mid} \boldsymbol{a}| \leq \operatorname{rad} \boldsymbol{a} \,\}. \tag{3.2}$$

Таким образом, задание середины и радиуса интервала также однозначно определяет его, чем часто пользуются и в теории, и на практике.

Середина интервала — это точка, которая «представляет его» наилучшим образом, так как наименее удалена от остальных точек этого интервала. Более точно, для любого $\tilde{x} \in \boldsymbol{x}$

$$\max_{x \in \boldsymbol{x}} |x - \tilde{x}| \;\geq\; \max_{x \in \boldsymbol{x}} |x - \operatorname{mid} \boldsymbol{x}|. \tag{3.3}$$

Радиус и ширина характеризуют разброс (рассеяние) точек интервала, т. е. абсолютную меру неопределённости или неоднозначности, выражаемой этим интервалом. Как уже говорилось выше, интервалы нулевой ширины (нулевого радиуса) обычно называют *вырожденными*. Они отождествляются с вещественными числами, так что, к примеру, $[1, 1]$ — это то же самое, что и 1, а $[0, 0] = 0$.

Важной характеристикой интервала является его *модуль* или *абсолютное значение*, определяемое как максимум модулей точек из интервала

$$|\boldsymbol{a}| \;=\; \max\{\, |a| \mid a \in \boldsymbol{a} \,\} \;=\; \max\{\, |\underline{\boldsymbol{a}}|, |\overline{\boldsymbol{a}}| \,\}.$$

Модуль интервала — это наибольшее отклонение его точек от нуля, фактически, аналог обычного модуля числа.

Отметим, что интервал, полностью определяясь двумя своими концами, представляет собой объект, который не несёт никакой дополнительной структуры. Все точки интервала равноценны (равнозначны, равновозможны), и для каждой из них интервал даёт двустороннее приближение. В частности, интервал $\boldsymbol{a}$ нельзя отождествлять с равномерным вероятностным распределением на $[\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}]$ с плотностью $1/(\operatorname{wid} \boldsymbol{a})$, так как в пределах $\boldsymbol{a}$ с тем же успехом может быть определено любое другое вероятностное распределение или даже какое-то распределение, меняющееся во времени, — случайный процесс. Более того, никакого вероятностного распределения на интервале $\boldsymbol{a}$ может не быть, так как условия его существования (практически не вполне тривиальные) не выполнены. Но интервал $\boldsymbol{a}$ всё равно будет описывать область возможных значений интересующей нас величины и может служить объектом, с которого начинаются дальнейшие математические конструкции и математическое моделирование реальности.

Интервалы являются множествами, составленными из вещественных чисел, и неудивительно, что большую роль для них играют теоретико-множественные отношения и операции (объединение, пересечение и др.). Особенно важно отношение включения одного интервала в другой:

$$\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} \;\text{ равносильно тому, что }\; \underline{\boldsymbol{a}} \geq \underline{\boldsymbol{b}} \;\text{ и }\; \overline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{b}}. \tag{3.4}$$

Отношение включения является частичным порядком и превращает множество интервалов в частично упорядоченное множество, важную и хорошо изученную математическую структуру.

Если интервалы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют непустое пересечение, т. е. $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} \neq \varnothing$, то можно дать простые выражения для результатов теоретико-множественных операций пересечения и объединения через концы этих интервалов

$$\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \bigl[\max\{\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}\}, \min\{\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}\}\bigr], \qquad \boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \bigl[\min\{\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}\}, \max\{\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}\}\bigr]. \tag{3.5}$$

Если же $\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b} = \varnothing$, т. е. интервалы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не имеют общих точек, то эти равенства уже неверны.

Обобщением операций пересечения и объединения являются операции взятия минимума и максимума относительно включения "$\subseteq$":

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \bigl[\max\{\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}\}, \min\{\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}\}\bigr], \qquad \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = \bigl[\min\{\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}\}, \max\{\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}\}\bigr]. \tag{3.6}$$

Они также понадобятся нам при обработке интервальных измерений. Первая из этих операций, "$\wedge$", не всегда выполнима во множестве обычных интервалов, но это затруднение преодолевается путём расширения множества интервалов специальными элементами — неправильными интервалами (см. ниже).

Классическая интервальная арифметика. Значения физических величин входят в математические выражения для физических законов, в различные формулы, где они складываются и вычитаются, умножаются и делятся, возводятся в степень и т. д. То же самое необходимо проделывать и с интервалами их значений. Как следствие, мы приходим к необходимости введения операций и отношений между интервалами.

Основным руководящим принципом является здесь определение операций между интервалами через результаты операций между их членами, т. е. "по представителям". Наиболее простым и популярным является определение результата интервальной операции как множества всевозможных результатов этой же операции между числами из интервала. Например, для интересующей нас бинарной (двухместной) операции "$\star$" можно считать, что

$$\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b} \;=\; \bigl\{\, a \star b \mid a \in \boldsymbol{b},\ b \in \boldsymbol{b} \,\bigr\}. \tag{3.7}$$

Аналогичным образом определяются интервальные аналоги для унарных (одноместных) операций. Тем самым получаем правила действий над интервалами, позволяющие оценивать области значений выражений, составленных из операций, для которых реализован этот принцип.

Если рассматриваются арифметические операции, т. е. $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$, то нетрудно показать, что задаваемые правилом (3.7) множества сами являются интервалами, исключая единственный неудобный случай деления на интервал $\boldsymbol{b}$, который содержит нуль [38, 40]. Конструктивные формулы, расшифровывающие этот общий принцип для отдельных арифметических операций, выглядят следующим образом:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \bigl[\, \underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}},\ \overline{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{b}} \,\bigr], \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \bigl[\, \underline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}},\ \overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}} \,\bigr], \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \bigl[\, \min\{\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}\}\ ,\ \max\{\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}}\,\overline{\boldsymbol{b}}\} \,\bigr], \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{a}/\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \bigl[\, 1/\overline{\boldsymbol{b}},\ 1/\underline{\boldsymbol{b}} \,\bigr] \qquad \text{для} \quad \boldsymbol{b} \not\ni 0. \tag{3.11}$$

Множество всех интервалов вещественной оси с операциями сложения, вычитания, умножения и деления, определёнными посредством (3.8)–(3.11), называется *классической интервальной арифметикой*, и часто его обозначают также $\mathbb{IR}$.

Пример 3.1. Пусть на участке электрической цепи постоянного тока приложенное напряжение находится в пределах интервала $[23, 25]$ Вольт, причём и сопротивление этого участка меняется (к примеру, в зависимости от изменяющейся температуры) в пределах $[100, 120]$ Ом. Каким будет ток в этом участке цепи?

Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся законом Ома, который даёт выражение для тока в виде

$$I = \frac{U}{R},$$

где U — напряжение на участке цепи, R — её сопротивление. Подставляя вместо этих переменных интервалы их изменения и заменяя операцию деления на интервальное деление (3.11), получим интервал значений тока через участок цепи

$$\frac{[23, 25] \text{ Вольт}}{[100, 120] \text{ Ом}} = \left[\, \tfrac{23}{120}, \tfrac{25}{100} \,\right] \text{ Ампер} \;\approx\; [0.19167, 0.25] \text{ Ампер}.$$

Это точный интервал значений тока, так как математическое выражение для него является очень простым и позволяет точно оценивать свою область значений с помощью классической интервальной арифметики. Для более сложных выражений оценка, полученная приведённым выше простым способом, может не быть равной области значений, но лишь содержит её, или, как часто говорят, является её внешней оценкой. (см. подробности в [38, 40]). ■

Отметим, что формулы интервальной арифметики совпадают с известными формулами для оперирования с абсолютными погрешностями (см., к примеру, [42] и другие пособия) для операций сложения и вычитания. Для умножения и деления формулы преобразования обычно приводятся для относительных погрешностей, так как для абсолютных погрешностей они довольно сложны и малообозримы. Но интервальная арифметика позволяет обрабатывать и этот случай, так как имеет алгоритмический характер.

Наиболее ценной является возможность применения интервальной арифметики в цепочках операций, которая позволяет получать интервальные оценки областей значений целых выражений. Детальное рассмотрение этого вопроса читатель может увидеть в книгах [37, 38, 40] и других публикациях по интервальному анализу.

Независимые и связанные интервальные величины. В теории вероятностей и вероятностной статистике большую роль играют понятия независимости случайных величин и их корреляции (см. [4]). В частности, многие красивые и важные результаты вероятностной статистики верны лишь при определённых условиях на зависимость и независимость фигурирующих в них случайных величин. Например, известная теорема Гаусса-Маркова об оптимальности оценок метода наименьших квадратов верна при условии, что погрешности данных являются независимыми случайными величинами.

В интервальном анализе также существует понятие зависимости и независимости величин, которое играет важнейшую роль в теории и практических применениях интервальных методов (см. [38]).

Прежде всего заметим, что интервал сам по себе описывает лишь границы возможных значений той или иной переменной величины. Для более тонкого анализа нередко требуется указание того, какая именно переменная может пробегать этот интервал, так как один и тот же интервал может представлять значения совершенно разных переменных. Следуя [38], станем говорить, что задана *интервальная величина* (интервальный параметр), если имеется переменная, которая может принимать значения в пределах некоторого интервала. На формальном математическом языке интервальной величиной является упорядоченная пара, которую мы будем обозначать специальными скобками $\lfloor a, \boldsymbol{a} \rceil$, где a — переменная и $\boldsymbol{a}$ — интервал её возможных значений, $a \in \boldsymbol{a}$. Допуская некоторую вольность, в тех случаях, где это не приводит к недоразумениям, договоримся употреблять для обозначения интервальной величины $\lfloor a, \boldsymbol{a} \rceil$ также записи «$a \in \boldsymbol{a}$» и «$\boldsymbol{a} \ni a$».

Для интервальных величин $\lfloor a_1, \boldsymbol{a}_1 \rceil$, $\lfloor a_2, \boldsymbol{a}_2 \rceil$, ..., $\lfloor a_n, \boldsymbol{a}_n \rceil$ назовём *совместной областью значений* множество всевозможных значений упорядоченного набора соответствующих переменных $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ в $\mathbb{R}^n$. Совместная область значений $\mathcal{S}$ интервальных величин $\lfloor a_1, \boldsymbol{a}_1 \rceil, \dots, \lfloor a_n, \boldsymbol{a}_n \rceil$ — это просто какое-то множество в $\mathbb{R}^n$, и из принадлежностей $a_1 \in \boldsymbol{a}_1$, $a_2 \in \boldsymbol{a}_2$, ..., $a_n \in \boldsymbol{a}_n$ следует, что $\mathcal{S} \subseteq \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \dots \times \boldsymbol{a}_n$. В действительности, соотношение левой и правой частей этого включения оказывает огромное влияние на интервальное оценивание результатов различных операций и отображений.

Определение 3.2. (см. [38]) *Интервальные величины $\lfloor a_1, \boldsymbol{a}_1 \rceil$, $\lfloor a_2, \boldsymbol{a}_2 \rceil$, ..., $\lfloor a_n, \boldsymbol{a}_n \rceil$ назовём независимыми (несвязанными), если совместная область значений этих величин совпадает с прямым декартовым произведением интервалов их изменения $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \dots \times \boldsymbol{a}_n$. В противном случае интервальные величины называются зависимыми или связанными.*

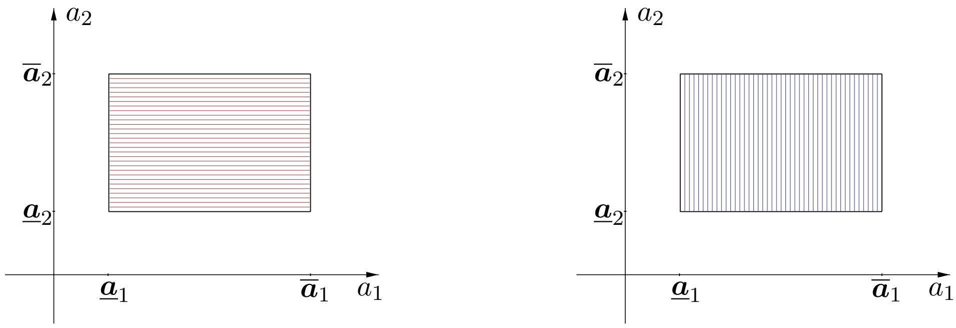

Рис. 3.1: Пояснение к определению независимых и связанных интервальных величин.

Определение 3.2 для двух интервальных величин $\lfloor x_1, \boldsymbol{x}_1 \rceil$ и $\lfloor x_2, \boldsymbol{x}_2 \rceil$ можно пояснить следующим образом. Их независимость означает, что никакая из переменных x_1 и x_2 не оказывает влияние на изменение другой переменной в пределах своего интервала. Тогда при любых значениях x_2 интервал изменения x_1 равен $\boldsymbol{x}_1$ (левый рисунок на Рис. 3.1), а при любых значениях x_1 интервал изменения x_2 равен $\boldsymbol{x}_2$ (правый рисунок на Рис. 3.1). В целом, в обоих случаях совместная область значений переменных x_1 и x_2, т. е. пары (x_1, x_2), совпадает с декартовым произведением $\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$.

Удобно говорить также, что на рассматриваемые интервальные величины $a_1 \in \boldsymbol{a}_1$, $a_2 \in \boldsymbol{a}_2$, ..., $a_n \in \boldsymbol{a}_n$ *наложены связи*, если имеются в виду какие-то соотношения для a_1, a_2, ..., a_n в виде равенств, неравенств и т. п., которые ограничивают область их совместных значений. Конкретный вид зависимости (связанности) интервальных величин удобно представлять наглядно графически на чертеже, изображающем совместное множество значений этих величин на фоне декартова произведения $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{a}_n$. Мы будем называть такие чертежи *диаграммами зависимости* (диаграммами связанности).

Классическая интервальная арифметика предназначена для работы с независимыми интервальными величинами. Если интервалы данных задачи представляют зависимые (связанные) интервальные величины, то требуется дополнительные усилия для вычисления областей значений функций, получения точных оценок и т. п.

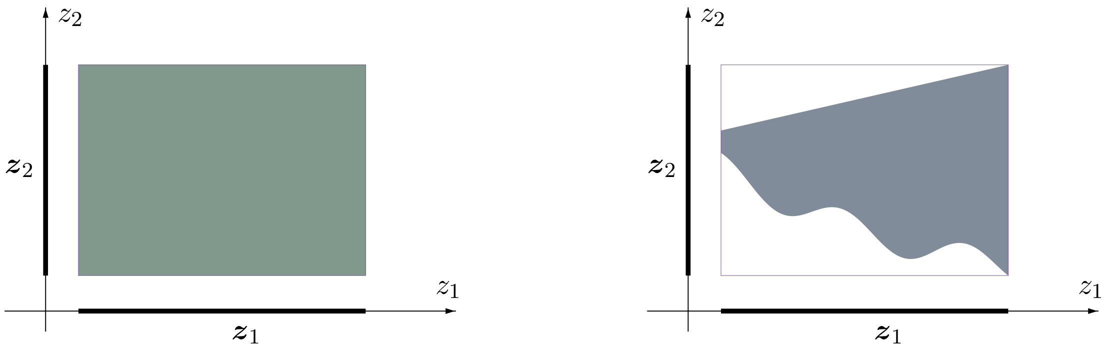

Рис. 3.2: Диаграммы зависимости для независимых и связанных интервальных величин.

Выяснение независимости или связанности интервальных величин является нетривиальной задачей. Часто её подменяют на выяснение зависимости или независимости переменных в тех или иных физических (химических, экономических и т. п.) процессах.

С другой стороны, интервальные измерения обладают важным свойством, впервые отмеченным в [38], которое решительно упрощает некоторые математические модели интервального анализа.

Полная интервальная арифметика Каухера. Помимо классической интервальной арифметики часто возникает необходимость работать с полной интервальной арифметикой Каухера. Она обозначается $\mathbb{KR}$ и является алгебраическим и порядковым пополнением арифметики $\mathbb{IR}$, примерно так же, как множество целых чисел пополняет натуральный ряд.

Элементами арифметики $\mathbb{KR}$ являются пары чисел, взятые в квадратные скобки, вида $[\alpha, \beta]$, которые мы также будем называть *интервалами*. При этом возможны ситуации, когда $\alpha \le \beta$ или $\alpha > \beta$. Если $\alpha \le \beta$, то $[\alpha, \beta]$ обозначает обычный интервал вещественной оси, и мы называем его *правильным*. Если же $\alpha > \beta$, то $[\alpha, \beta]$ — *неправильный интервал*. Таким образом, $\mathbb{IR} \subset \mathbb{KR}$.

Неправильные интервалы можно рассматривать как математические абстракции (аналогичные, к примеру, отрицательным или мнимым числам), но которым могут быть даны осмысленные физические интерпретации. В контексте нашей работы полная интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$ и неправильные интервалы по существу возникают при математической обработке интервальных результатов наблюдений и измерений.

Правильные и неправильные интервалы, две половинки $\mathbb{KR}$, переходят друг в друга в результате отображения *дуализации* $\mathrm{dual} : \mathbb{KR} \to \mathbb{KR}$, меняющего местами (переворачивающего) концы интервала, т. е. такого что

$$\mathrm{dual}\,\boldsymbol{a} := [\,\overline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{a}}\,].$$

Правильной проекцией интервала $\boldsymbol{a}$ из $\mathbb{KR}$ называется интервал, обозначаемый $\mathrm{pro}\,\boldsymbol{a}$ и такой, что

$$\mathrm{pro}\,\boldsymbol{a} = \begin{cases} \boldsymbol{a}, & \text{если } \boldsymbol{a} \text{ — правильный,} \\ \mathrm{dual}\,\boldsymbol{a}, & \text{если } \boldsymbol{a} \text{ — неправильный.} \end{cases}$$

С помощью правильной проекции из произвольного интервала получается его «правильный образ», с которым можно обращаться как с обычным числовым интервалом в $\mathbb{R}$, т. е. множеством всех точек вещественной оси между двумя заданными концами.

Арифметические операции между интервалами в $\mathbb{KR}$ продолжают операции в $\mathbb{IR}$. В частности, формулы (3.8)–(3.9) для сложения и вычитания также определяют сложение и вычитание в $\mathbb{KR}$. Умножение и деление между интервалами из $\mathbb{KR}$ определяется более сложно, и их описание можно найти в [38].

Наиболее важным для нас в интервальной арифметике Каухера является то, что для любого интервала имеется противоположный ему и, кроме того, для интервалов, не содержащих нуля, имеются обратные к ним. Иными словами, арифметические операции в большинстве ситуаций обратимы. В частности, для сложения обратной операцией является не операция интервального вычитания, а другая операция, которую мы будем обозначать знаком "$\ominus$":

$$\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b} = [\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}]. \tag{3.12}$$

Нетрудно проверить, что для любых интервалов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ из $\mathbb{KR}$ имеют место равенства

$$\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{a} = 0, \qquad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \ominus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}, \qquad (\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}.$$

Пример 3.2. Для интервала $[1, 2]$ противоположным по сложению является интервал $[-1, -2]$. Это неправильный интервал, и

$$[1, 2] + [-1, -2] = [1 - 1, 2 - 2] = [0, 0] = 0,$$

но в сумме с исходным интервалом даёт нейтральный элемент 0. Заметим, что для обычного интервального вычитания

$$[1, 2] - [1, 2] = [1 - 2, 2 - 1] = [-1, 1].$$

■

Абсолютное значение интервалов из $\mathbb{KR}$ определяется, как абсолютное значение их правильных проекций, т. е.

$$|\boldsymbol{a}| \;=\; \max\{\, |\underline{\boldsymbol{a}}|, |\overline{\boldsymbol{a}}| \,\}.$$

Полная интервальная арифметика Каухера $\mathbb{KR}$ пополняет классическую интервальную арифметику $\mathbb{IR}$ не только в алгебраическом смысле, но также и относительно естественного порядка по включению "$\subseteq$".

Определение 3.3. *Будем говорить, что для интервалов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{KR}$ *выполняется включение* $\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b}$, *если*

$$\underline{\boldsymbol{a}} \geq \underline{\boldsymbol{b}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{b}},$$

т. е. справедливы те же соотношения (3.4) *между концами интервалов, что и в случае классической интервальной арифметики.*

Относительно введённого таким образом отношения включения в $\mathbb{KR}$ для любых двух интервалов существует минимальный и максимальный по включению, т. е. результаты операций $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$ всегда определены.

Пример 3.3.

$$[1, 2] \wedge [3, 4] = [3, 2], \qquad [1, 2] \vee [3, 4] = [1, 4].$$

■

Расстояние на множестве интервалов. Расстояние между интервалами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ из $\mathbb{IR}$ или $\mathbb{KR}$ определяется как

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \;=\; \max\bigl\{|\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{b}}|, |\overline{\boldsymbol{a}} - \overline{\boldsymbol{b}}|\bigr\}. \tag{3.13}$$

Оно обладает всеми свойствами абстрактного расстояния (метрики) и ещё некоторыми хорошими свойствами в связи с интервальными арифметическими операциями. Кроме того, легко убедиться, что

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \;=\; |\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b}|.$$

Пример 3.4. Рассмотрим интервал $[3, 5]$ и точку 3.6 внутри него. Расстояние от этой точки, отождествляемой с вырожденным интервалом $[3.6, 3.6]$, до данного интервала равно

$$\operatorname{dist}(3.6, [3, 5]) = \max\bigl\{|3.6 - 3|, |3.6 - 5|\bigr\} = 1.4.$$

Рассмотрим дуальный интервал к интервалу $[3, 5]$. Это интервал $\operatorname{dual}[3, 5] = [5, 3]$. Расстояние его до исходного равно $\operatorname{dist}([3, 5], [5, 3]) = 2$. ■

Расстояние важно для определения отклонения интервалов друг от друга и, как следствие, для определения погрешности интервальных измерений.

Оценки точечные и интервальные. Оценки величин, которые мы получаем с помощью традиционной статистики, как известно, могут быть *точечными* или *интервальными*. Точечные оценки, т. е. оценки в виде точки — числа, вектора или матрицы — соответствуют, как правило, модели рассматриваемого объекта или явления и могут непосредственно использоваться при его дальнейшем исследовании, при прогнозировании его поведения и т. п. Интервальные оценки дают области возможных значений точечных оценок и нужны для характеризации их возможного разброса и вариабельности. Так как в традиционной вероятностной статистике оценки параметров сами являются случайными величинами, а носители их вероятностных распределений могут быть неограниченными, то при определении интервальных оценок обычно задают некоторый *уровень значимости* или *доверительной вероятности*, с помощью которых выполняют усечение вероятностного распределения. Тем самым всегда обеспечивается ограниченность интервальных оценок и их практичность.

В статистике интервальных данных оценки величин также могут быть *точечными* либо *интервальными* или даже иметь форму других множеств. Точечная оценка несёт тот же смысл, что и в традиционной статистике, а интервальная оценка тоже даёт область возможных значений точечных оценок, характеризуя их возможный разброс и вариабельности. Но есть и существенные отличия от вероятностной статистики. Во-первых, задание уровня значимости не требуется, так как множества значений оценки, как правило, ограниченны. Во-вторых, интервальные оценки могут иметь различных смысл — быть внутренними или внешними, сообразно чему их смысл различен. В-третьих, в пределах внутренней интервальной оценки все значения равноценны и тоже могут служить точечными оценками рассматриваемой величины. Напротив, в традиционной вероятностной статистике точечные значения внутри интервальной оценки не вполне равноценны друг другу.

Двойственность интервальной неопределённости. Интервальная неопределённость имеет двойственный характер, вытекающий из двойственного смысла, который может быть приписан интервалу, как множеству значений некоторой величины. С одной стороны, интересующие нас свойства, условия или требования могут выполняться для всех точек рассматриваемого интервала (области). С другой стороны, они могут выполняться лишь для некоторых (в крайнем случае — для одной) точек интервала (области).

Интервалы вещественной оси $\mathbb{R}$ — это множества точек из $\mathbb{R}$, которые мы обычно рассматриваем как удобные в описании и использовании множества возможных значений параметров различных задач. Как правило, можно считать, что задано какое-либо свойство $P(v)$, которое может выполняться или же не выполняться для точек v из этих интервалов.

Например, свойство P может иметь вид "является решением данного уравнения", "является решением рассматриваемой задачи" с некоторыми параметрами, которые принимают значения из заданных интервалов, и т. д. При этом возможны следующие принципиально различные ситуации:

1) либо свойство $P(v)$ выполняется для *всех* точек v из данного интервала $\boldsymbol{v}$,
2) либо свойство $P(v)$ выполняется лишь для *некоторых* точек v из интервала $\boldsymbol{v}$, не обязательно всех, или даже только для одного значения из $\boldsymbol{v}$.

Формально это отличие хорошо описывается с помощью логических кванторов — квантора всеобщности "$\forall$", означающего "для всех", и квантора существования "$\exists$", означающего "существует" (см., например, [25, 26, 27]):

– в первом случае мы пишем "$(\forall v \in \boldsymbol{v})\, P(v)$" и говорим об *интервальной A-неопределённости*,

– во втором случае мы пишем "$(\exists v \in \boldsymbol{v})\, P(v)$" и говорим об *интервальной E-неопределённости.*

Таким образом, при работе с интервалами и постановке разнообразных интервальных задач мы должны различать два указанных выше типа интервальной неопределённости. В частности, на этом пути возникает важное понятие кванторных решений и AE-решений интервальных систем уравнений, неравенств и т. д. (см. [38]), а также понятия слабого и сильного согласования интервальных измерительных данных и восстанавливаемых параметров объекта (см. §5).

Истинное значение измеряемой величины. *Истинным значением измеряемой величины* называется значение, идеально отражающее в рамках принятой нами модели (теории) рассматриваемое свойство объекта или явления. Подчеркнём, что измеряемая величина существует лишь в рамках принятой модели, то есть имеет смысл только до тех пор, пока модель признается адекватной объекту или явлению. Принципиальным положением классической метрологии является утверждение о существовании истинного значения. Но получение этого истинного значения на практике часто является невозможным, так как измерения могут искажаться неизбежными помехами, наши измерительные приборы могут быть несовершенны и т. п.

Это определение не вполне соответствует определениям термина "истинное значение величины", данных в VIM3 "Международном словаре по метрологии Основные и общие понятия и соответствующие термины" ([28], пункты 1.19 и 2.11, истинное значение величины, [29]) и РМГ 29-2013 ГСИ Метрология. Основные термины и определения ([30], пункт 5.4, истинное значение). Основным отличием является отход современных методик измерений, принятых в 90-е годы XX века, от понятия истинного значения величины по причине его якобы недоступности.

В зависимости от смысла измеряемой физической величины её истинное значение может быть целого, вещественного или интервального типа. Принадлежность целому или вещественному типу понятна и вполне традиционна, а вот рассмотрение интервального типа данных для истинного значения измеряемой величины — это новшество, которое требует пояснений.

Интервальное значение используется в тех случаях, когда точечное значение наблюдаемой величины не являются физически осмысленными. В физических законах и в практике измерений измеряемая величина (или характеристика) по своей первоначальной физической сути часто имеет точечный характер. Таковыми являются, например, температура тела, концентрация вещества в химическом растворе. В таких случаях построение двустороннего интервала для измеряемой величины может рассматриваться как способ представления информации о ней.

С другой стороны, измеряемая величина по своей физической сути может быть не точечной величиной, а объектом, имеющим протяжённость, к примеру, интервалом на числовой оси или даже областью-пятном в пространстве. Например, это происходит в случае, когда летящий самолёт облучается радиолокационным сигналом. Поверхность самолета является криволинейной и состоит из многих отражающих участков разной ориентации. Как следствие, отраженный радиолокационный сигнал (даже от плоского фронта облучающего сигнала) уже будет “размытой точкой” или “пятном” в пространстве.

Пример 3.5. Рассмотрим задачу кругового обследования пространства обзорным радиолокатором. Для получения информации об азимуте, например, летящего самолета, антенна радиолокатора, вращаясь, облучает самолет импульсными зондирующими сигналами, которые посылаются через равные промежутки времени (Рис. 3.3). Вследствие конечной ширины диаграммы направленности антенны (она изображена колоколообразной штриховой линией на Рис. 3.3), отраженный сигнал “размазывается”, и на входе приемника радиолокатора приобретает вид “всплеска”, т. е. пачки отраженных импульсов (вертикальные столбики на Рис. 3.3), принятых в моменты времени $t_1, \ldots, t_N$. Инженеры производят оценку временно́го интервала $[t_1, t_N]$ основания этой пачки над порогом чувствительности приемника (горизонтальная штрих-пунктирная линия на Рис. 3.3).

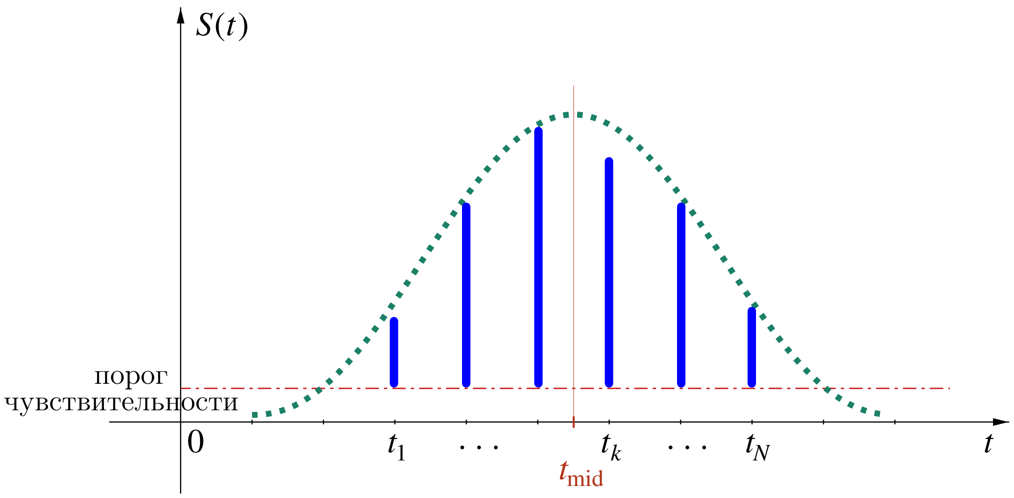

Рис. 3.3: Как образуется интервал при радиолокационном обследовании объекта.

Таким образом, результат измерения в данном случае уже сам представляется некоторым интервалом. Но для дальнейших расчетов на практике используется, как правило, средняя точка t_{mid} этого интервала, что является, конечно, огрублением исходных данных измерения. ■

Похожая ситуация наблюдается также в квантовой механике, где наблюдаемые величины описываются линейными операторами. При этом для пар физических величин (называемых “квантовыми наблюдаемыми”), которые выражаются некоммутирующими операторами, существует фундаментальное ограничение на точность одновременного определения их величины. Они задаются так называемыми “соотношениями неопределённостей”. Примером такого ограничения служит известное соотношение неопределённостей Гейзенберга для координаты и импульса, связывающее среднеквадратичные отклонения Δx координаты и Δp импульса частицы

$$\Delta x \, \Delta p \geq \hbar/2,$$

где $\hbar$ — приведённая постоянная Планка.

Примеры невозможности точного одновременного определения наборов физических величин можно продолжить. Для волновых процессов соотношение, родственное к соотношению неопределённостей, выглядит как $\Delta\nu \, \Delta t \geq 1$, где $\Delta\nu$ — полоса пропускания системы в частотной области, Δt — длительность наблюдаемого колебательного процесса [31]. В оптике инвариант Лагранжа-Гельмгольца (известный также как инвариант Гюйгенса-Гельмгольца) связывает линейную протяженность (ширину) пучка y и его угловую расходимость φ

$$y \, n \, \varphi \;=\; \text{const},$$

где n — оптическая плотность среды. Эта величина неизменна в любой среде [32]. Таким образом, невозможно добиться одновременно идеальной пространственной и угловой фокусировки.

В механике известна теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма (см. [33], стр. 262). Рассмотрим траекторию малого пятна (множества точек) в фазовом пространстве, описываемым обобщенными координатами Δp_i и Δq_i. В процессе перемещения вдоль траектории пятно растягивается по одной координате, например p_i, но сжимается по другой координате q_i так, что произведение $\Delta p_i \, \Delta q_i$ остаётся константой. Площадь пятна (фазовый объём) не изменяется.

Упомянутые эффекты необходимо учитывать при построении технических систем и измерительных приборов в волновой и корпускулярной оптике. Например, во времяпролётных масс-спектрометрах пространственно-временная фокусировка заряженных частиц возможна в плоскости, а не в малой области пространства.

Измерения и их результаты. Основным понятием обработки наблюдений является “наблюдение” или “измерение”.

Определение 3.4. *Измерением (замером, наблюдением) будем называть измеренное значение величины.*

В обыденной речи слово “измерение” (как и его аналоги) может обозначать также процесс измерения или наблюдения. Из контекста обычно бывает ясно, какое значение слова имеется в виду.

На практике измерение (замер, наблюдение) может представлять собой число или интервал или же составленные из них многомерные объекты (вектор, матрицу, интервальный вектор, интервальную матрицу и т. п.).

Модель погрешности наблюдения. В ряде случаев исследователю при выполнении наблюдений и измерений может быть известна структура погрешности, возникающей в значении измеряемой величины. В частности, возможно использование следующих моделей погрешности измерений.

Модель общего вида содержит в каждом наблюдении как относительную δ, так и абсолютную e составляющие погрешности:

$$y = y^{\text{ист}} + \delta y^{\text{ист}} + e, \;\; |\delta| \leq \delta_{\max}, \;\; |e| \leq e_{\max},$$

где y — измерение с погрешностью, $y^{\text{ист}}$ — неизвестное истинное значение наблюдаемой величины; δ, e — погрешности измерений, ограниченные по модулю, соответственно, максимальными величинами $\delta_{\max}$ и $e_{\max}$; компонента $\delta y^{\text{ист}}$ пропорциональна измеряемой величине, компонента e — абсолютная погрешность, не зависящая от измеряемой величины.

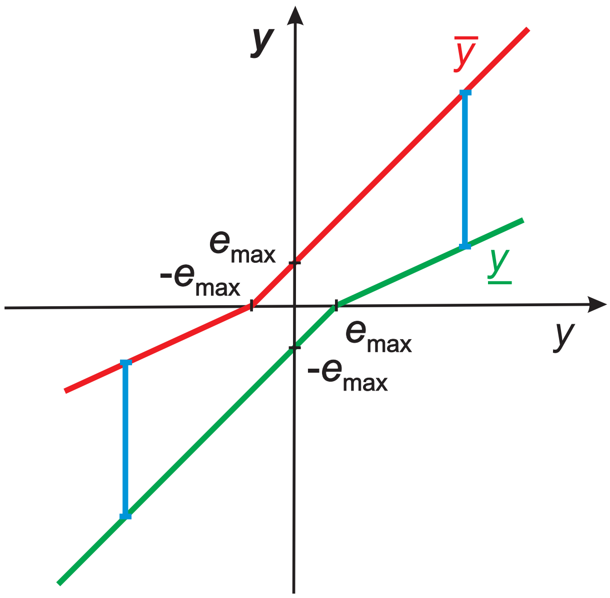

Рис. 3.4: Вычисление интервала неопределённости измерения при наличии относительной и абсолютной погрешностей.

В этом случае интервал неопределённости $\boldsymbol{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$ измерения y рассчитывается следующим образом:

$$\boldsymbol{y} = \begin{cases} \left[\,(y - e_{\max})/(1 - \delta_{\max}),\; (y + e_{\max})/(1 + \delta_{\max})\,\right], & \text{если } y < -e_{\max}, \\ \left[\,(y - e_{\max})/(1 - \delta_{\max}),\; (y + e_{\max})/(1 - \delta_{\max})\,\right], & \text{если } -e_{\max} \leq y \leq e_{\max}, \\ \left[\,(y - e_{\max})/(1 + \delta_{\max}),\; (y + e_{\max})/(1 - \delta_{\max})\,\right], & \text{если } y > e_{\max}. \end{cases}$$

Наглядно интервал неопределённости измерения в зависимости от результата точечного измерения показан на Рис. 3.4.

При наличии только абсолютной погрешности интервал неопределённости измерения равен $\boldsymbol{y} = [\,y - e_{\max}, y + e_{\max}]$. При наличии только относительной погрешности интервал неопределённости измерения равен

$$\boldsymbol{y} = \left[\,y/(1 + \delta_{\max}),\; y/(1 - \delta_{\max})\,\right].$$

Пример 3.6. Предположим, что в процессе измерения силы тока мы смотрим на шкалу амперметра и, соблюдая все необходимые технические условия, отсчитываем измеренное значение — 5.4 Ампера. Класс точности используемого прибора — 2, и это, по определению, максимально допустимое значение основной приведённой погрешности, выраженной в процентах. Следовательно, истинное значение измеряемого тока должно лежать в интервале

$$\bigl[5.4 - 0.02 \cdot 5.4, 5.4 + 0.02 \cdot 5.4\bigr] \text{ Ампер } = [5.292, 5.508] \text{ Ампер.}$$

■

Интервал измерения строится с целью оценить истинное значение измеряемой величины, и получаемые при этом приближения могут быть качественно различными. Они могут включать ("накрывать") истинное значение, но они также могут его и не содержать. Например, для измерения, которое является выбросом (промахом).

Как известно, выборка или выборочная совокупность в вероятностной статистике — это часть генеральной совокупности элементов, которая охватывается экспериментом (наблюдением, опросом). Мы в нашей работе будем называть *выборкой* просто совокупность результатов измерений. Понятия генеральной совокупности при этом не привлекается.

Каждое измерение из выборки в случае неточности описывается своим интервалом неопределённости. Погрешности и неопределённости многомерных величин могут описываться интервальными векторами, которые часто называют брусами (см. Раздел 5 и дополнительные определения в нём).

На практике концы интервалов, представляющие результаты измерений, сами могут быть известны неточно, так что возникает необходимость работы с интервалами, имеющими интервальные концы. Такие объекты известны в интервальном анализе и называются твинами (от англ. фразы TWice INterval, "двойной интервал").

Пример 3.7. Пример с измерением осцилляций нейтрино, результаты измерений которых удобно представить в виде твинов.

При измерении осцилляций нейтрино в атмосфере Земли экспериментаторы традиционно используют безразмерную величину R, характеризующую отношение числа разных сортов нейтрино. Подборка значений R из разных экспериментов приведена на стр. 872 в [51]. Приведем часть данных в таблице 3.2 .

Таблица 3.2: Величины значений R из разных экспериментов [51].

Эксперимент	Результат
Kamiokande	$0.60^{+0.07}_{-0.06} \pm 0.05$
⋮	⋮
IMB	$0.54 \pm 0.05 \pm 0.12$

В первом столбце таблицы приведены название эксперимента, во втором столбце — измерений в форме «среднее, статистическая погрешность, систематическая погрешность».

В виде твинов эти данные можно представить следующим образом ??? ■

Введение твинов, как нового типа данных, позволяет более гибко действовать на практике, учитывая возможную неточность в назначении концов интервалов возможных значений интересующих нас величин.

Погрешность. На практике измерения и наблюдения, как правило, подвержены неизбежным внешним влияниям, выполняющие их средства измерений и приборы не вполне точны и т. п., что в целом приводит к отличию измеренного значения от истинного (идеального) значения физической величины. По отношению к неточным измерениям иногда используют термин “зашумлённые” (зашумлённые данные и т. п.), особенно, когда проводится целая серия таких измерений или наблюдений. Чтобы количественно охарактеризовать неточности измерений, вводится понятие *погрешности*.

Погрешность измерения — это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Математически погрешность равна алгебраической разности измеренного значения и истинного значения величины. Если это истинное значение x^* и результат измерения $\tilde{x}$ — вещественные числа, то погрешностью является разность $\tilde{x} - x^*$. Если истинное значение и результат измерения — интервалы $\boldsymbol{x}^*$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}$ соответственно, то погрешность $\boldsymbol{\Delta}$ определяется как алгебраическая разность

$$\boldsymbol{\Delta} \;=\; \tilde{\boldsymbol{x}} \ominus \boldsymbol{x}^* \tag{3.14}$$

в полной интервальной арифметике Каухера, задаваемая посредством (3.12). Напомним, что обычное интервальное вычитание, которое обозначается традиционным знаком “$-$” и является интервальным расширением вычитания, не является операцией, алгебраически обратной сложению и для нашей цели непригодно. Формула (3.14) справедлива и в том случае, когда истинное значение величины x^* — точечное, а результат её измерения $\tilde{\boldsymbol{x}}$ интервальный. При этом в (3.14) полагаем $\boldsymbol{x}^* = [\,x^*, x^*]$.

Абсолютной погрешностью измерения назовём модуль (абсолютное значение) погрешности. Для интервальных измерений абсолютная погрешность равна модулю интервала разности $\tilde{x} \ominus \boldsymbol{x}$, и, как легко видеть, она равна расстоянию (3.13) между измеренным и истинным значениями величины.

Пример 3.8. Рассмотрим для примера ситуацию, когда истинное значение измеряемой величины, скажем, массы какого-то груза, является интервалом $[3, 4]$ кг, а её измерение дало интервал $[3, 5]$ кг. Тогда его погрешность равна

$$[3, 5] \text{ кг} \ominus [3, 4] \text{ кг} = [0, 1] \text{ кг}. \tag{3.15}$$

Если в результате измерения мы получим вещественное значение 3.8 кг, которое отождествляется с интервалом $[3.8, 3.8]$ кг, то его погрешность

$$[3.8, 3.8] \text{ кг} \ominus [3, 4] \text{ кг} = [0.8, -0.2] \text{ кг} \tag{3.16}$$

— неправильный интервал. Может показаться, что он бессмыслен с физической точки зрения, но это поспешный вывод. Ситуация здесь совершенно аналогична, например, тому, как при измерении положительных физических величин (массы, плотности, давления и т. п.) мы получаем отрицательную погрешность, если измеренное значение приближает истинное значение снизу.

Абсолютная погрешность измерения равна 1 в случае (3.15) и 0.8 в случае (3.16). ■

Относительной погрешностью измерения назовём отношение его абсолютной погрешности к модулю истинного значения физической величины:

$$\delta \;=\; \frac{|\,\tilde{\boldsymbol{x}} \ominus \boldsymbol{x}^*|}{|\,\boldsymbol{x}^*|} \;=\; \frac{\operatorname{dist}\,(\,\tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}^*)}{|\,\boldsymbol{x}^*|}. \tag{3.17}$$

Как и в традиционном случае, в знаменателе этих дробей вместо редко доступного истинного значения величины можно использовать её действительное значение.

Точечная оценка истинного значения некоторой физической величины — это число (вектор, матрица и т. п.), дающий приближение истинного значения в том или ином смысле. Аналогично, интервальная оценка истинного значения — это интервал, дающий приближение истинного значения в том или ином смысле (находящаяся с ним в том или ином отношении — принадлежности, расположения на определенном расстоянии, и т.д.).

Накрывающие и ненакрывающие измерения. Для теории обработки интервальных данных фундаментальный характер имеют следующие определения:

Определение 3.5. *Накрывающее измерение (накрывающий замер) — это интервальная оценка неизвестной истинной величины, гарантированно ее содержащая. Измерение, не являющееся накрывающим, будем называть ненакрывающим (Рис. 3.5 и Рис. 3.6).*

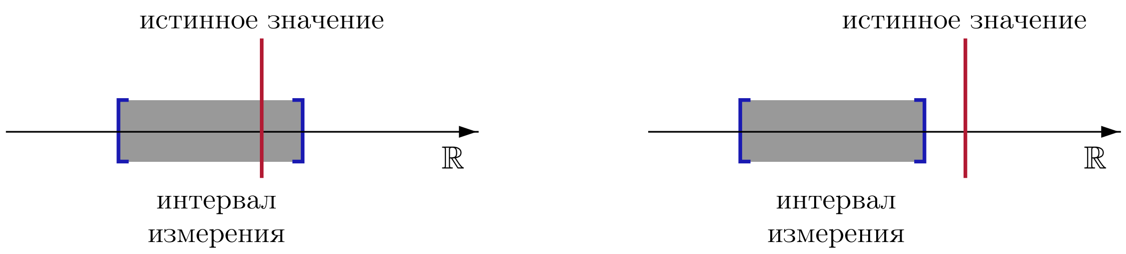

Рис. 3.5: Накрывающее (слева) и ненакрывающее (справа) измерения точечного истинного значения некоторой физической величины.

Определение 3.6. *Накрывающая выборка — совокупность накрывающих измерений, т. е. выборка, в которой все измерения (наблюдения) являются накрывающими. Напротив, выборка называется ненакрывающей, если хотя бы одно из входящих в неё измерений — ненакрывающее.*

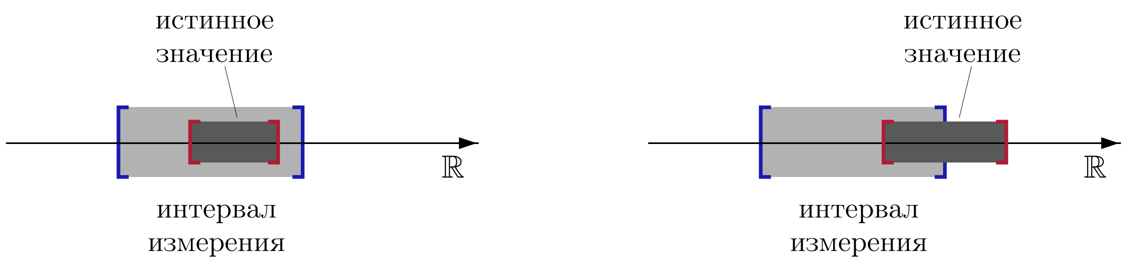

Рис. 3.6: Накрывающее (слева) и ненакрывающее (справа) измерения интервального истинного значения некоторой физической величины.

Возможные альтернативные термины — "включающее измерение", "охватывающее измерение" (их отрицание — "невключающее", "неохватывающее"). Предлагаемые английские эквиваленты — enclosing measurement, covering measurement.

Важность введённых понятий обусловлена тем, что накрывающее (охватывающее) измерение даёт не просто какое-то приближение к интересующему нас истинному значению физической величины, но двустороннюю оценку ("вилку") этого значения, т. е. его гарантированные оценки снизу и сверху. Это обстоятельство позволяет привлечь для обработки накрывающих измерений более сильные средства, качественно другой математический аппарат (в частности, некоторые специфичные методы интервального анализа), и получить в результате уточнённые оценки для истинного значения — также в виде двусторонней оценки. Для ненакрывающих измерений и выборок это подчас недостижимо.

Тот факт, что интервальный результат измерения не является накрывающим, может быть вызван различными причинами. Прежде всего, это измерение может оказаться так называемым выбросом. Ещё одной частой причиной является то, что в процессе получения интервального результата мы можем недооценить погрешность прибора или методики измерения, т. е. взять её меньшей, чем реальная погрешность. Сюда же относится неадекватность выбранной модели объекта (физическая константа, к примеру, может не быть таковой и дрейфовать во времени в процессе выполнения измерений).

Проверка того, является ли данное измерение или выборка накрывающими, находится уже вне рамок математической теории интервальных измерений. Она возлагается на практику измерений, которая в каждом конкретном случае должна дать (или не давать) гарантии двусторонних оценок истинного значения измеряемой величины. Отметим также, что для традиционных точечных измерений аналога введённых понятий не существует, так как все точечные измерения, как правило, ненакрывающие. Накрывающее точечное измерение совпадает с истинным значением измеряемой величины, и потому подобное событие является исключительным и его почти невозможно проверить. Как следствие, вводить отдельное понятие для описания такой ситуации смысла нет.

Ценность свойства накрытия столь велика, что нередко для его достижения прибегают к специальным приёмам в процессе предобработки данных. Например, несколько расширяют полученные интервалы результатов измерений с тем, чтобы новые расширенные интервалы были гарантированно накрывающими, т. е. содержащими истинные значения измеряемых величин. См. параграф «Приём варьирования неопределённости» в следующем разделе.

Информационное множество. Определим неформально одно из важнейших понятий теории обработки интервальных данных — понятие *информационного множества*, соответствующего интервальным данным измерений.

Данные измерений, о которых говорилось в предшествующих пунктах, можно называть *первичными*, так как чаще всего они ещё подвергаются дальнейшей обработке, чтобы была получена оценка физической величины, построена зависимость и т. п. Таким образом, для определения окончательного результата измерения необходимо дополнить наши конструкции “моделью обработки данных” или “способом обработки данных”. Это математическая модель, формализующая требования к результату обработки измерения и оформленная в виде системы уравнений, неравенств, задачи оптимизации и т. п., которая определяет то, что должно считаться результатом обработки измерений, оценкой параметров и т. д.

Пример 3.9. Предположим, что мы решаем задачу восстановления зависимости некоторого заданного вида по данным измерений. Эта зависимость может восстанавливаться, например, методом наименьших квадратов, методом наименьших модулей или с помощью чебышёвского (минимаксного) сглаживания. Для одних и тех же данных измерений результат решения задачи будет существенно разным в зависимости от того, какая именно методика их обработки применяется — МНК, метод наименьших модулей или чебышёвское приближение. ■

Информационное множество — это множество значений параметров, удовлетворяющих математической системе отношений (как правило, интервальной системе уравнений, неравенств и т. п.), полученной в результате агрегирования информации о математической модели объекта, первичных данных измерений и модели их обработки. Из сказанного следует, что информационное множество существенно зависит от выбранной модели обработки данных, и потому даже для одних и тех же данных может быть определено неединственным образом в зависимости от того, как мы эти данные обрабатываем и интерпретируем.

Ниже в разделах 4 и 5 мы дадим конкретные определения информационных множеств, возникающих в задачах оценивания физической постоянной и задаче восстановления линейной зависимости.

Отметим, что понятие “информационного множества” давно используется в теории дифференциальных игр и теории управления динамическими системами в условиях неопределённости. В этих дисциплинах оно обозначает совокупность возможных позиций системы или совокупности параметров её движения, совместных со свойствами системы, её описанием и информацией о её движении, накопленной к моменту обработки данных. Далее после работы [54] термин “информационное множество” стал применяться для обозначения совокупности результатов измерений и наблюдений в условиях ограниченной неопределённости, и мы следуем этой традиции.

Аналогом понятия “информационное множество” может отчасти служить стандартный доверительный интервал оцениваемой случайной величины в методах традиционной вероятностной статистики.

Принцип соответствия. *Принцип соответствия* в методологии науки — это утверждение, что любая новая научная теория должна включать старую теорию и ее результаты как частный предельный случай. Принцип соответствия впервые был сформулирован Н. Бором в начале XX века для объяснения взаимного соотношения нарождающейся квантовой механики и традиционной физики макрообъектов [52]. Другой пример: в специальной теории относительности для малых скоростей мы получаем те же уравнения движения, что и в классической механике Ньютона.

В действительности, принцип соответствия имеет более широкое методологическое значение, будучи применим не только к физике и естествознанию, но и к информационным технологиям, анализу данных и т. п. (см. [53]). В частности, при обработке интервальных данных хорошие и разумные методы должны в пределе, при стремлении ширины интервалов к нулю, переходить в какие-то методы обработки точечных данных, коль скоро действительные числа являются предельным случаем интервалов. Не все предложенные на данный момент методики обработки интервальных данных удовлетворяют “принципу соответствия”.

4 Технологии обработки данных измерений. Восстановление физической константы

Выборка измерений и интервалы их неопределённости. Пусть представлена выборка измерений некоторой физической величины (Рис. 4.1), которая описывается как

$$\{\ \boldsymbol{x}_k, \quad k = 1, \ldots, N\ \}, \tag{4.1}$$

где k — номер измерения, $\boldsymbol{x}_k$ — интервальный результат измерения, полученный, к примеру, какой-либо из процедур, описанных в предыдущих разделах.

Значения $\operatorname{rad} \boldsymbol{x}_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, показывают величину интервальной неопределённости отдельных измерений выборки. Следуя традиционной метрологии, будем называть измерения выборки *равноточными*, если неопределённость всех этих измерений одинакова, т. е. $\operatorname{rad} \boldsymbol{x}_k = \mathrm{const}$, $k = 1, \ldots, N$. *Неравноточными* называем измерения, в которых величина неопределённости $\operatorname{rad} \boldsymbol{x}_k$ может меняться в зависимости от измерения выборки, $k = 1, \ldots, N$.

Информационным множеством в случае оценивания единичной физической величины по выборке интервальных данных будет также интервал, который мы будем называть

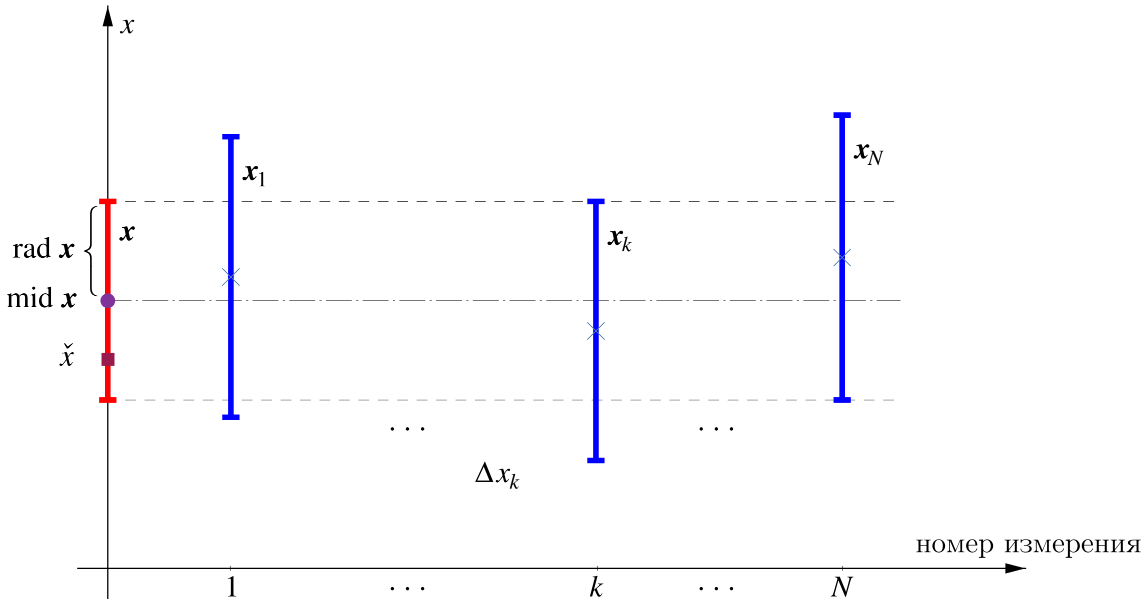

Рис. 4.1: Выборка интервальных измерений физической константы.

информационным интервалом. Неформально говоря, это интервал, содержащий значения оцениваемой величины, которые "совместны" с измерениями выборки ("согласующихся" с данными этих измерений). Но конкретный смысл, вкладываемый в понятия "совместные" или "согласующиеся", будет различен для разных ситуаций. В частности, он зависит от того, является ли выборка интервальных данных накрывающей или нет.

Совместность выборки. Важным внутренним свойством выборки, характеризующим согласование её данных между собой, является понятие совместности.

Определение 4.1. *Выборка называется совместной, если пересечение всех интервалов составляющих её измерений непусто, т. е.*

$$\bigcap_{1\leq k\leq N} \boldsymbol{x}_k \neq \varnothing.$$

В противном случае, если пересечение всех интервалов $\boldsymbol{x}_k$, $k = 1, \dots, N$, *является пустым, то выборка называется несовместной.*

Свойство совместности характеризует саму выборку и, строго говоря, не связано прямо с её свойством быть накрывающей выборкой, т. е. с включением ею истинного значения измеряемой величины. Выборка может быть совместной, но ненакрывающей. Но если выборка накрывающая, то она обязана быть совместной. Эквивалентная формулировка этого свойства: если выборка несовместна, то она и ненакрывающая. В силу сказанного в практической обработке результатов измерений трудный анализ накрытия выборкой истинного значения часто заменяют анализом её совместности, так как это удобнее и нагляднее (хотя и не вполне строго).

Если обрабатываемая выборка несовместна, то это может вызываться следующими причинами:

(a) неверно заданной величиной неопределённости измерений rad $\boldsymbol{x}_k$ для каких-то $k = 1, 2, \dots, N$, заниженной по отношению к фактической величине неопределённости;

(б) наличием в выборке выбросов (промахов), т. е. сбойных измерений;

(в) невыполнением условий на измеряемую величину (её непостоянство и т. п.).

В случае (а) выполняются процедуры, описанные далее в пункте "Коррекция величины неопределённости измерений выборки". В случае (б) выполняется дополнительный инженерный анализ данных обрабатываемой выборки или выявлению ее распадения на совместные подвыборки. Аналогичная процедура рекомендована в стандарте [12].

Пример 4.1. Одной из самых известных и самых важных физических констант является гравитационная константа G, которая фигурирует в законе всемирного тяготения. История её измерений продолжается уже более двух столетий, и полученные на этом пути результаты нетривиальны.

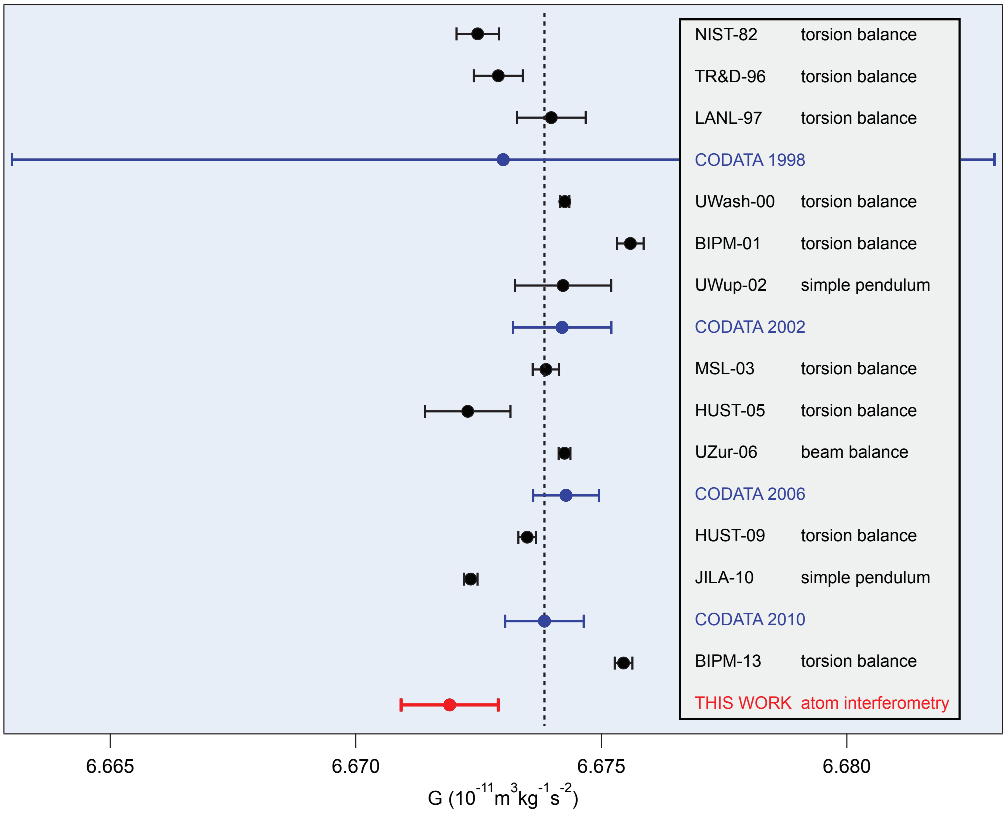

Рис. 4.2: Результаты измерений гравитационной константы согласно [57].

Измерения гравитационной константы, проведённые в последние десятилетия в различных исследовательских центрах и различными методами, выражаются доверительными интервалами, не пересекающимися друг с другом (Рис. 4.2). Таким образом, если из полученных интервальных данных составить выборку, то она будет несовместной.

Конкретные числовые данные и ссылки на источники их получения можно найти как в обзорных статьях [57], [58], так и в электронном приложении [76] к настоящей статье. В этом приложении наряду с данными о гравитационной константе рассмотрены и другие примеры аналогичного свойства, которые относятся к измерению константы Хаббла, времени жизни нейтрона, массе t-кварка и т. п. ∎

Технология восстановления физической константы по результатам интервальных наблюдений существенно зависит от того, является выборка накрывающей или ненакрывающей.

Случай накрывающей выборки. Если истинное значение величины содержится во всех интервалах измерений выборки, то оно должно принадлежать также пересечению этих интервалов. Следовательно, уточнённым интервалом принадлежности истинного значения можно взять

$$\boldsymbol{I} \;=\; \bigcap_{1\leq k\leq N} \boldsymbol{x}_k. \tag{4.2}$$

Это и будет информационный интервал $\boldsymbol{I}$ оценки измеряемой физической константы. Явные выражения для его левой (нижней) и правой (верхней) границ даются следующими формулами:

$$\underline{\boldsymbol{I}} \;=\; \max_{k=1,\dots,N} \underline{\boldsymbol{x}}_k, \qquad\qquad \overline{\boldsymbol{I}} \;=\; \min_{k=1,\dots,N} \overline{\boldsymbol{x}}_k. \tag{4.3}$$

Интересен предельный случай совместной выборки, когда $\underline{\boldsymbol{I}} = \overline{\boldsymbol{I}} = x^*$. Тогда выборка совместна, но мы, образно говоря, находимся на пределе её совместности, когда информационный интервал $\boldsymbol{I}$ вырождается в точку.

Если известен некоторый априорный интервал возможных значений оцениваемой физической величины $\boldsymbol{I}_{\text{апр}} = [\underline{\boldsymbol{I}}_{\text{апр}}, \overline{\boldsymbol{I}}_{\text{апр}}]$, который должен гарантированно содержать её, то границы результирующего интервала (4.2) могут быть уточнены пересечением

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I} \cap \boldsymbol{I}_{\text{апр}}. \tag{4.4}$$

Центральная оценка и её характеристики. На практике часто необходимо работать не с интервалами интересующей нас величины — (4.2) или (4.4), а с некоторой точечной оценкой. Все точки информационного интервала вполне равноценны друг другу, так что эту точечную оценку можно выбирать достаточно произвольно. Тем не менее, имеет смысл взять из интервала некоторое точечное значение, которое представляет его наилучшим образом. В качестве такой величины можно использовать, к примеру, его *центральную оценку* x_{c}

$$x_c \;=\; \tfrac{1}{2}\left(\underline{\boldsymbol{I}} + \overline{\boldsymbol{I}}\right). \tag{4.5}$$

Напомним, что в силу (3.3) середина интервала обладает определённой оптимальностью, являясь точкой, которая наименее удалёна от других точек этого интервала.

Наряду с центральной оценкой для характеризации её точности введём также *радиус* ρ интервальной оценки, т. е. максимальное отклонение границ интервала от центральной оценки

$$\rho \;=\; \tfrac{1}{2}\left(\overline{\boldsymbol{I}} - \underline{\boldsymbol{I}}\right). \tag{4.6}$$

При анализе данных имеет смысл знать отклонения точечных и интервальных измерений от центральной оценки. *Отклонения* Δ_k для первичных точечных измерений рассчитываются как

$$\Delta_k = |x_k - x_{\text{c}}|, \qquad k = 1,\dots,N, \tag{4.7}$$

а для интервальных измерений

$$\Delta_k = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_k, x_{\text{c}}), \qquad k = 1,\dots,N. \tag{4.8}$$

Приём варьирования неопределённости. Выше мы видели, что величина реальной неопределённости измерения, т. е. радиуса интервала измерения, определяется непросто и подчас неоднозначно. С другой стороны, он сильно влияет на свойства как отдельного измерения, так и выборки интервальных измерений. Совместность выборки и свойство накрытия истинного значения существенно зависят от правильно назначенной величины неопределённости — радиуса интервальных измерений. Наконец, если некоторое Δ является величиной неопределённости интервального измерения или выборки, то и любое Δ', удовлетворяющее $\Delta' \geq \Delta$, также может служить величиной неопределённости.

Сказанное выше приводит к мысли о том, что при обработке интервальных данных величиной неопределённости можно управлять, виртуально варьируя её, с целью исследования интервальных измерений, их выборок и построения оценок с нужными свойствами. В этом и состоит суть "приёма варьирования неопределённости", вынесенного в заголовок этого подраздела.

Если выборка интервальных измерений несовместна, то, увеличивая одновременно величину неопределённости всех измерений, мы всегда сможем добиться того, чтобы выборка сделалась совместной, т. е. чтобы пересечение (4.2) стало непустым, а интервал (4.12) — правильным. Кроме того, точка (или точки), которая первой появляется в непустом пересечении (4.2) при расширении интервальных измерений, и тем самым, требует наименьшего увеличения неопределённости измерений для достижения совместности выборки, является "наименее несовместной". Её разумно брать в качестве оценки константы или оценки параметров.

Наоборот, если некоторая выборка интервальных измерений совместна, то можно равномерно сужать образующие её интервалы до возникновения её несовместности. Последняя точка (или точки), которая остаются в непустом множестве решений перед его исчезновением, очевидно, имеет наибольший "запас совместности". И снова эта точка является наилучшим кандидатом на оценку рассматриваемой величины.

В реальности часто встречаются ситуации, когда измерения выборки неравнозначны друг другу по качеству, к примеру, неравноточны. Тогда одновременное изменение величины неопределённости для всех измерений на одно и то же значение может оказаться неразумным. Имеет смысл задаться некоторым положительным весовым вектором $w = (w_1, w_2, \ldots, w_N)$, $w_k > 0$, таким, что изменение величины неопределённости k-го измерения — $\operatorname{rad} \boldsymbol{x}_k$, должно быть пропорциональным w_k, т. е. для любых k и l справедливо

$$\frac{\text{изменение } \operatorname{rad} \boldsymbol{x}_k}{\text{изменение } \operatorname{rad} \boldsymbol{x}_l} = \frac{w_k}{w_l}.$$

Идея варьирования неопределённости интервальных измерений оформилась в 80-е годы XX века (Н.М. Оскорбин [43] и др.).

Коррекция величины неопределённости измерений выборки. Из предыдущего пункта вытекает одна из возможных процедур коррекции величины неопределённости измерений. В случае обнаружения несовместности обрабатываемой выборки производится варьирование (увеличение) исходного ограничения $e_{\max}$ до такого "критического" значения $e^*_{\max}$, при котором впервые появляется непустой информационный интервал (4.2).

Далее выполняется инженерный анализ этой величины:

- если $e^*_{\max}$ не превышает некоторое априорное приемлемое значение $e^{\text{апр}}_{\max}$, то рабочее значение $e_{\max}$ корректируется до этого практически приемлемого значения $e^*_{\max}$ и обработка повторяется с обновленным рабочим значением $e_{\max} = e^*_{\max}$;

- если значение $e^*_{\max}$ является практически неприемлемым, то исследуемая выборка является несовместной, содержит выбросы и подлежит дополнительному инженерному анализу или выявлению её распадения на *совместные подвыборки* при некоторой приемлемой величине неопределённости измерений.

Случай ненакрывающей выборки. Если выборка — ненакрывающая, так что некоторые из её измерений не содержат истинного значения измеряемой величины, то приведённые выше рассуждения и приёмы частично теряют свой смысл. Тогда при получении оценки физической величины необходимо руководствоваться другими соображениями.

Поскольку кроме информации, представленной выборкой, в нашем распоряжении ничего нет, то следует бережно отнестись ко всем измерениям и считать, что каждое из них несёт существенную информацию об измеряемой величине. Тогда информационное множество для истинного значения величины имеет смысл взять в виде объединения всех интервалов выборки, т. е. как

$$\boldsymbol{I} \;=\; \bigcup_{1\leq k\leq N} \boldsymbol{x}_k. \tag{4.9}$$

Это множество может не быть единым интервалом на вещественной оси (подобное часто случается, к примеру, если выборка несовместна). Разумно тогда воспользоваться операцией "$\vee$", обобщающей объединение, и вместо (4.9) взять информационный интервал в виде

$$\boldsymbol{I} \;=\; \bigvee_{1\leq k\leq N} \boldsymbol{x}_k \;=\; \Bigl[\min_{1\leq k\leq N} \underline{\boldsymbol{x}}_k,\, \max_{1\leq k\leq N} \overline{\boldsymbol{x}}_k\Bigr]. \tag{4.10}$$

Точечной оценкой измеряемой величины может служить середина этого интервала, т. е.

$$x_{\text{c}} \;=\; \operatorname{mid} \boldsymbol{I} \;=\; \tfrac{1}{2}\Bigl(\min_{1\leq k\leq N} \underline{\boldsymbol{x}}_k + \max_{1\leq k\leq N} \overline{\boldsymbol{x}}_k\Bigr). \tag{4.11}$$

Пример 4.2. Конкретный пример с результатами измерения, когда получающиеся интервалы не пересекаются друг с другом, но их объединяют. ■

Другой возможный сценарий обработки данных ненакрывающей выборки может состоять в том, что вместо пересечения интервальных измерений мы используем обобщающую её операцию "$\wedge$", т. е. взятие минимума всех интервальных результатов измерений относительно упорядочения по включению, которое задаётся Определением 3.3:

$$\boldsymbol{J} \;=\; \bigwedge_{1\leq k\leq N} \boldsymbol{x}_k \;=\; \Bigl[\max_{1\leq k\leq N} \underline{\boldsymbol{x}}_k,\, \min_{1\leq k\leq N} \overline{\boldsymbol{x}}_k\Bigr]. \tag{4.12}$$

Здесь по существу требуется использование полной интервальной арифметики Каухера, так как интервал (4.12) может оказаться неправильным. Соответственно, точечной оценкой измеряемой величины следует взять

$$x_{\text{c}} \;=\; \operatorname{mid} \boldsymbol{J} \;=\; \tfrac{1}{2}\Bigl(\max_{1\leq k\leq N} \underline{\boldsymbol{x}}_k + \min_{1\leq k\leq N} \overline{\boldsymbol{x}}_k\Bigr), \tag{4.13}$$

т. е. середину интервала, который получается как минимум по включению всех интервалов выборки (см. (3.6)). Если выборка совместна, то (4.13) совпадает с (4.5). Если же выборка несовместна, то результатом (4.12) является неправильный интервал $\boldsymbol{J}$, $\operatorname{rad} \boldsymbol{J} < 0$. Соответственно, информационное множество результатов измерений по обрабатываемой выборке пусто.

Но даже когда интервал (4.12) неправилен, его середина (4.13) — это точка, обладающая определёнными условиями оптимальности. Она первой появляется в непустом пересечении интервалов выборки, если мы станем равномерно уширять их согласно сформулированному выше "приёму варьирования неопределённости".

В самом деле, пусть радиусы всех интервалов выборки увеличились на s, $s \geq 0$, тогда как середины остались неизменными. Вместо радиусов $\operatorname{rad} \boldsymbol{x}_k$ мы получили $\operatorname{rad} \boldsymbol{x}_k + s$,

$k = 1, 2, \ldots, N$. Кроме того, все нижние концы интервальных измерений стали теперь $\underline{\boldsymbol{x}}_k - s$, а верхние концы — $\overline{\boldsymbol{x}}_k + s$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Как следствие, $\max_{1 \leq k \leq N} \underline{\boldsymbol{x}}_k$ уменьшается на s, а $\min_{1 \leq k \leq N} \overline{\boldsymbol{x}}_k$ увеличивается на s, а радиус получающегося интервала (4.12) теперь равен $\operatorname{rad} \boldsymbol{J} + s$. Поэтому, если взять s таким, чтобы $s \geq |\operatorname{rad} \boldsymbol{J}|$, то получившийся интервал станет правильным, и точка x_c будет лежать в нём. Можно также сказать, что в точке (4.13) минимизируется равномерное уширение интервалов данных рассматриваемой выборки, необходимое для достижения её совместности.

Наконец, если выборка интервальных измерений — ненакрывающая, то иногда имеет смысл взять среднее арифметическое образующих её интервалов, т. е.

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{x}_k.$$

Его средина может служить точечной оценкой измеряемой константы.

Нетрудно убедиться в том, что все три рассмотренных выше приёма обработки ненакрывающей выборки при стремлении ширины интервальных данных к нулю переходят в известный метод оценивания физической константы по точечным данным, когда она полагается равной среднему арифметическому измерений выборки. То есть, эти методы удовлетворяют “принципу соответствия”, рассмотренному в конце Раздела 3.

5 Технологии обработки данных измерений. Восстановление линейной зависимости

В этом разделе даются необходимые определения новых терминов и понятий, связанных с восстановлением функциональных зависимостей по данным их измерений и наблюдений. Мы рассмотрим более подробно случай простейшей линейной зависимости, но большинство построений и рассуждений легко переносятся на общий нелинейный случай.

Постановка задачи. Предположим, что величина y является функцией некоторого заданного вида от независимых аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$, т. е.

$$y = f(x, \beta), \tag{5.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — вектор независимых переменных, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$ — вектор параметров функции. Имея набор значений переменных x и y, нам нужно найти $\beta_1, \ldots, \beta_l$, которые соответствуют конкретной функции f из параметрического семейства (5.1). Эта задача известна как “задача восстановления зависимостей”, “задача идентификации параметров”, “задача подгонки данных”, “задача регрессионного анализа” и т. п.

Её важнейший частный случай — определение линейной функциональной зависимости вида

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m, \tag{5.2}$$

в которой $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — независимые переменные (которые называются также *экзогенными*, *предикторными* или просто *входными* переменными), y — это зависимая переменная (которая называется также *эндогенной*, *критериальной* или *выходной* переменной), а $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$ — некоторые коэффициенты. Эти неизвестные коэффициенты должны быть определены из ряда измерений значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и y.

Результаты измерений неточны, и мы предполагаем что они имеют *ограниченную неопределённость* (см. Разделы 2 и 3 нашей работы), когда нам известны лишь некоторые интервалы, дающие двусторонние границы измеренных значений. Таким образом, результатом i-го измерения являются такие интервалы $\boldsymbol{x}_1^{(i)}$, $\boldsymbol{x}_2^{(i)}$, ..., $\boldsymbol{x}_m^{(i)}$, $\boldsymbol{y}^{(i)}$, относительно которых мы предполагаем, что истинное значение x_1 лежит в пределах $\boldsymbol{x}_1^{(i)}$, истинное значение x_2 лежит в $\boldsymbol{x}_2^{(i)}$ и т. д. вплоть до y, истинное значение которого находится в интервале $\boldsymbol{y}^{(i)}$. В целом имеется n измерений, так что индекс i может принимать значения из множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Далее для удобства построений и выкладок обозначим номер измерения i не верхним, а нижним индексом, который мы поставим первым при обозначении входов. Таким образом, полный набор данных будет иметь вид

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x}_{11}, & \boldsymbol{x}_{12}, & \ldots & \boldsymbol{x}_{1m}, & \boldsymbol{y}_1, \\ \boldsymbol{x}_{21}, & \boldsymbol{x}_{22}, & \ldots & \boldsymbol{x}_{2m}, & \boldsymbol{y}_2, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{x}_{n1}, & \boldsymbol{x}_{n2}, & \ldots & \boldsymbol{x}_{nm}, & \boldsymbol{y}_n. \end{array} \tag{5.3}$$

Нам необходимо найти или как-то оценить коэффициенты β_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, для которых линейная функция (5.2) “наилучшим образом” приближала бы интервальные данные измерений (5.3). Как и раньше, интервалы $\boldsymbol{x}_{i1}$, $\boldsymbol{x}_{i2}$, ..., $\boldsymbol{x}_{im}$, $\boldsymbol{y}_i$ мы называем интервалами неопределённости i-го измерения. Но кроме них нам также потребуется характеризовать целиком всё множество, ограничиваемое в многомерном пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ этими интервалами по отдельным координатным осям.

Определение 5.1. *Брусом неопределённости i-го измерения зависимости назовём интервальный вектор-брус $(\boldsymbol{x}_{i1}, \boldsymbol{x}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{im}, \boldsymbol{y}_i) \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Таким образом, каждый брус неопределённости измерения зависимости является прямым декартовым произведением интервалов неопределённости независимых переменных и зависимой переменной. На Рис. 5.1 на плоскости $0xy$ наглядно показаны брусы неопределённости измерений и график линейной функции, которую мы восстанавливаем.

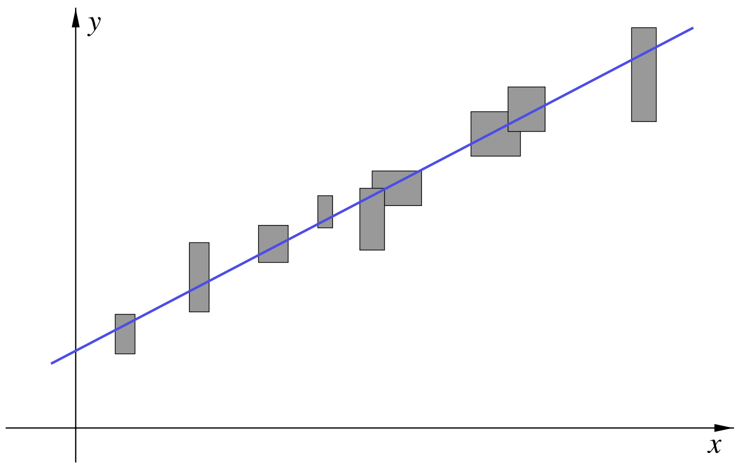

Рис. 5.1: Наглядная иллюстрация задачи восстановления линейной зависимости по данным с интервальной неопределённостью.

Что следует считать решением задачи восстановления зависимости по интервальным данным (5.3)?

Очевидно, что функцию, вида (5.1) или (5.2), нужно считать точным решением задачи восстановления искомой зависимости, если её график проходит через все брусы неопределённости данных. В случае точечных данных эта идеальная ситуация почти никогда не реализуется и неустойчива к малым возмущениям в данных. Но в случае данных с существенной интервальной неопределённостью прохождение графика функции через брусы данных (5.3) может реализовываться, и оно устойчиво к возмущениям в данных.

Кроме того, дополнительную специфику задаче придаёт то новое обстоятельство, что брусы неопределённости данных (5.3), в отличие от бесконечно малых и бесструктурных точек точечных данных, получают структуру и потому нужно различать, как именно проходит график функции через эти брусы.

Как и ранее, будем называть информационным множеством параметров в случае восстановления зависимости мы называем множество значений параметров зависимости, совместных с данными в каком-то определённом смысле.

В традиционном "точечном" случае, когда данные неинтервальны, решение задачи восстановления зависимостей получается по следующей общей схеме. Мы подставляем данные в формулу для зависимости (5.2) и получаем для каждого отдельного измерения одно уравнение. В целом в результате этой процедуры возникает система уравнений, решив которую, в обычном или обобщённом смысле, мы найдём параметры зависимости. В интервальном случае, действуя аналогичным образом, мы получим уже интервальную систему уравнений, которую также можно решать. Её решением, обычным или в некотором обобщённом смысле, будет вектор оценки параметров восстанавливаемой зависимости (5.2). Информационное множество задачи получается при этом как множество решений этой интервальной системы уравнений, построенной на основе формулы (5.2) и данных (5.3).

Коридор совместных зависимостей. Определение параметров функциональной зависимости производится, как правило, для того, чтобы затем найденную формулу использовать для предсказания значений зависимости в других интересующих нас точках её области определения. Ясно, что такое предсказание будет осуществляться с некоторой погрешностью, вызванной неопределённостями данных, неоднозначностью самой процедуры восстановления и т. п. Эту неопределённость предсказания также необходимо знать и учитывать в нашей деятельности.

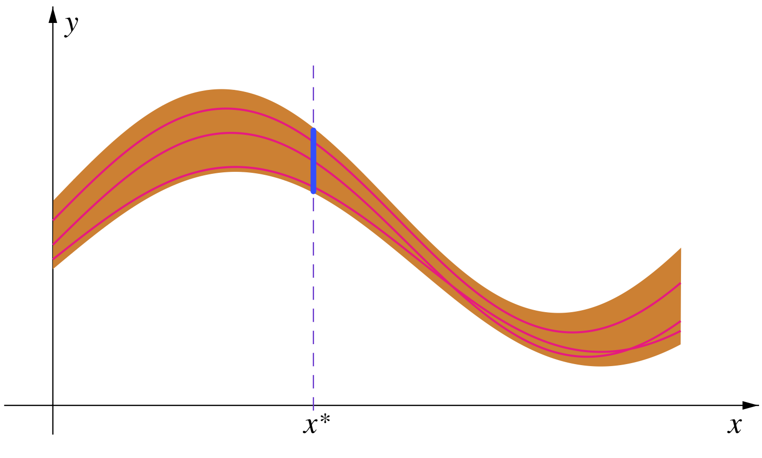

Рис. 5.2: Коридор совместных зависимостей и его сечение для какого-то значения аргумента x^*.

Если информационное множество задачи восстановления зависимостей непусто, то обычно оно задаёт целое семейство зависимостей, совместных с данными задачи, которое имеет смысл рассматривать вместе, как единое целое, в вопросах, касающихся оценивания неопределённости предсказания, учёта всех возможных сценариев развития и т. п.

Как следствие, возникает необходимость рассматривать вместе, единым целым, множество всех функций, совместных с интервальными данными задачи восстановления зависимости. Мы будем будем называть его *коридором совместных зависимостей*.

В литературе использовались также другие термины для обозначения этого объекта — "трубка" совместных зависимостей [49] (имеет происхождение в теории управления), "полоса" или даже "слой неопределённости" [14]. Строгое определение коридора совместных зависимостей может быть дано на основе математического понятия многозначного отображения. Напомним (см., к примеру, [59, 60]), что для произвольных множеств X и Y *многозначным отображением* F из X в Y называется соответствие (правило), сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое *значением* или *образом* x.

Определение 5.2. *Пусть в задаче восстановления зависимостей информационное множество I параметров зависимостей $y = f(x, \beta)$, совместных с данными, является непустым. Коридором совместных зависимостей рассматриваемой задачи называется многозначное отображение T, сопоставляющее каждому значению аргумента x множество*

$$T(x) \;=\; \bigcup_{\beta \in I} f(x, \beta).$$

Значение $T(x)$ коридора совместных зависимостей при каком-то определённом аргументе x ("сечение коридора") — это множество $\cup_{\beta \in I} f(x, \beta)$, образованное всевозможными значениями, которые принимают на этом аргументе функциональные зависимости, совместные с интервальными данными измерений.

Примеры использования коридора совместных зависимостей можно увидеть, к примеру, в [49].

Случай точных измерений входных переменных. Важнейшим и часто встречающимся частным случаем рассмотренной задачи является ситуация, когда независимые (экзогенные, предикторные, входные) переменные x_1, x_2, ..., x_m измеряются точно, и вместо телесных брусов неопределённости измерений (как на Рис. 5.1) мы имеем отрезки прямых $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}, \boldsymbol{y}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, параллельные оси зависимой (эндогенной, критериальной, выходной) переменной (см. Рис. 5.3). Именно такая постановка задачи была рассмотрена в пионерской работе Л.В. Канторовича [1].

Отсутствие неопределённости значений независимых переменных приводит к кардинальному упрощению математической модели рассматриваемой ситуации. Как следствие, для решения и полного исследования этого частного случая, начиная с работы [1], предложено большое количество эффективных вычислительных методов. Рассмотрим эти математические вопросы более детально.

Естественно считать, что линейная зависимость (5.2) *совместна* (согласуется) с интервальными данными измерений, если её график проходит через все отрезки неопределённости, задаваемые интервалами измерений выходной переменной y, как это изображено на Рис. 5.3). Подобное понимание совместности (согласования) является прямым обобщением того понимания "совместности", которое традиционно для неинтервального случая и используется, к примеру в постановке задачи интерполяции.

Подставляя в зависимость (5.2) данные для входных переменных x_1, x_2, ..., x_m в i-ом измерении и требуя включения полученного значения в интервалы $\boldsymbol{y}_i$, получим

$$\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_m x_{im} \in \boldsymbol{y}_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{5.4}$$

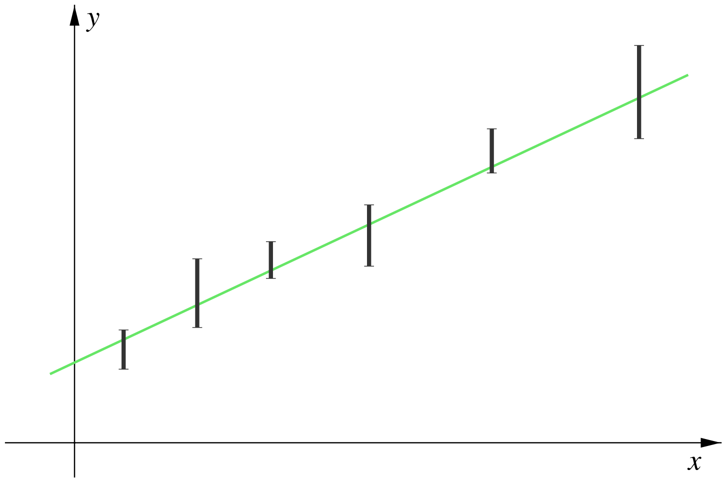

Рис. 5.3: Частный случай задачи восстановления линейной зависимости по неточным данным, когда входные переменные измеряются точно

Фактически, это интервальная система линейных алгебраических уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \beta_0 & + & x_{11}\beta_1 & + & x_{12}\beta_2 & + & \ldots & + & x_{1m}\beta_m & = & \boldsymbol{y}_1, \\ \beta_0 & + & x_{21}\beta_1 & + & x_{22}\beta_2 & + & \ldots & + & x_{2m}\beta_m & = & \boldsymbol{y}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_0 & + & x_{n1}\beta_1 & + & x_{n2}\beta_2 & + & \ldots & + & x_{nm}\beta_m & = & \boldsymbol{y}_n, \end{array}\right.$$

у которой интервальность присутствует только в правой части. С другой стороны, (5.4) равносильно

$$\left\{\begin{array}{lcccl} \underline{\boldsymbol{y}}_1 & \leq & \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \ldots + \beta_m x_{1m} & \leq & \overline{\boldsymbol{y}}_1, \\ \underline{\boldsymbol{y}}_2 & \leq & \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \ldots + \beta_m x_{2m} & \leq & \overline{\boldsymbol{y}}_2, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underline{\boldsymbol{y}}_n & \leq & \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \ldots + \beta_m x_{nm} & \leq & \overline{\boldsymbol{y}}_n. \end{array}\right. \tag{5.5}$$

Это система двусторонних линейных неравенств относительно неизвестных параметров β_0, β_1, β_2, ..., β_m, решив которую, мы можем найти искомую линейную зависимость. Множество решений системы неравенств (5.5) естественно считать информационным множеством параметров восстанавливаемой зависимости для рассматриваемого случая.

Для i-го двустороннего неравенства из системы (5.5) множество решений — это полоса в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ параметров $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$, ограниченная с двух сторон гиперплоскостями с уравнениями

$$\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_m x_{im} = \underline{\boldsymbol{y}}_i \qquad \text{и} \qquad \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_m x_{im} = \overline{\boldsymbol{y}}_i.$$

Множество решений системы неравенств (5.5) является пересечением n штук таких полос, отвечающих отдельным измерениям. Можно рассматривать эти полосы как информационные множества отдельных измерений. На Рис. 5.4 изображено формирование множества решений системы неравенств (5.5) для случая двух параметров (т. е. $m = 1$) и $n = 3$.

В целом множество решений системы линейных алгебраических неравенств (5.5) является выпуклым многогранным множеством в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$. Распознавание того, пусто оно или непусто, а также нахождение какой-либо точки из него, являются задачами, сложность которых ограничена полиномом от их размера (см., к примеру, [61]).

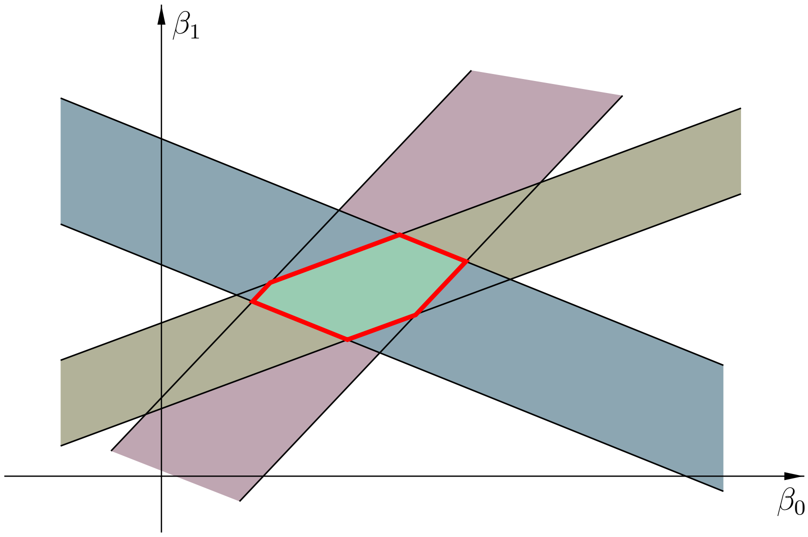

Рис. 5.4: Образование информационного множества параметров линейной зависимости (ограничено красной линией) для случая точных входных переменных

Существуют эффективные и хорошо разработанные вычислительные методы для решения этих вопросов и для нахождения оценок множества решений, например, основанные на сведении рассматриваемой задачи к задаче линейного программирования.

Пример 5.1. (пример И.А. Шарой [63])
Пусть x и y — вещественные переменные, и y линейно зависит от x, так что

$$y = \beta_0 + \beta_1 x. \tag{5.6}$$

Неизвестные параметры этой зависимости — β_0 и β_1 — надо определить по данным измерений, которые приведены в следующей таблице:

Номер опыта	1	2	3
x	0	1	2
y	1	2	-0.5

Предположим также, что в каждом опыте переменная x измеряется точно, тогда как для переменной y измерения дают только интервал, середина (центр) которого приведена в таблице. Радиус интервала неопределённости во всех измерениях равен единице, а настоящее значение y может быть любым числом из этого интервала. Требуется оценить информационное множество, т. е. множество пар значений β_0 и β_1, согласующихся с данными измерений в сформулированном выше смысле.

Обозначим x_i — значение переменной x в i-м опыте,
y_i — центр интервала для переменной y в i-м опыте.

Информационное множество в рассматриваемом примере описывается системой включений

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 + [-1, 1] \\ 2 + [-1, 1] \\ -0.5 + [-1, 1] \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

и представляет собой пересечение трех полос:

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} && \beta_0 \in [0, 2],\\
&\text{(II)} && \beta_1 \in -\beta_0 + [1, 3],\\
&\text{(III)} && \beta_1 \in -0.5\,\beta_0 + [-0.75, 0.25].
\end{aligned}
$$

На Рис. 5.5 эти полосы занумерованы, а информационное множество — их непустое пересечение — выделено заливкой. Это треугольник с вершинами $(2, -1)$, $(1.5, -0.5)$ и $(2, -0.75)$.

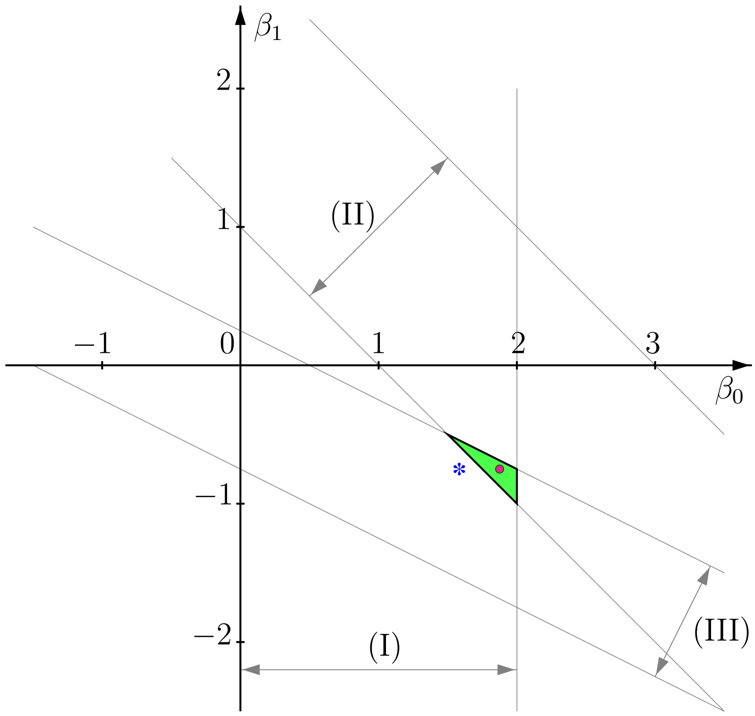

Рис. 5.5: В пространстве переменных β_0 и β_1 оценка по МНК (звёздочка) не лежит в информационном множестве (закрашенный треугольник)

Для оценивания параметров зависимости (5.6) воспользуемся каким-либо из существующих методов восстановления зависимостей по интервальным данным, например, методом максимума согласования [62, 63, 71, 72]. В нём требуется нахождение максимума специального распознающего функционала, который является мерой согласования параметров и данных. Имеем

$$\max \mathrm{Uss} = 0.125, \qquad \arg\max \mathrm{Uss} = \begin{pmatrix} 1.875 \\ -0.75 \end{pmatrix},$$

т. е. восстанавливаемая зависимость получается в виде

$$y = 1.875 - 0.75x$$

На Рис. 5.5 видно, что полученная оценка параметров (жирная точка) находится в информационном множестве задачи. На Рис. 5.6 ей соответствует выделенная штрих-пунктиром регрессионная прямая, которая лежит примерно посредине среди всех возможных прямых, согласованных с данными (коридора совместных зависимостей). Совершенно те же результаты получаются при использовании метода центра неопределённости [44, 46].

Воспользуемся теперь для оценивания параметров β_0 и β_1 традиционным методом наименьших квадратов (МНК), предполагая, что неопределённость в измерениях выходной переменной y имеет вероятностный характер [65, 66]. Представленные в таблице выше значения y можно тогда считать средними значениями (математическими ожиданиями), а интервалы неопределённости пусть содержат все или «почти все» возможные значения этой величины. Например, если погрешности измерения y подчинены нормальному закону распределения с дисперсией σ, то интервалы $[-1, 1]$ для погрешностей y могут быть хорошо известными инженерам интервалами «плюс-минус 3σ» или даже «плюс-минус 6σ», которые обеспечивают достоверность на уровне 99.73% и 99.99966% соответственно.

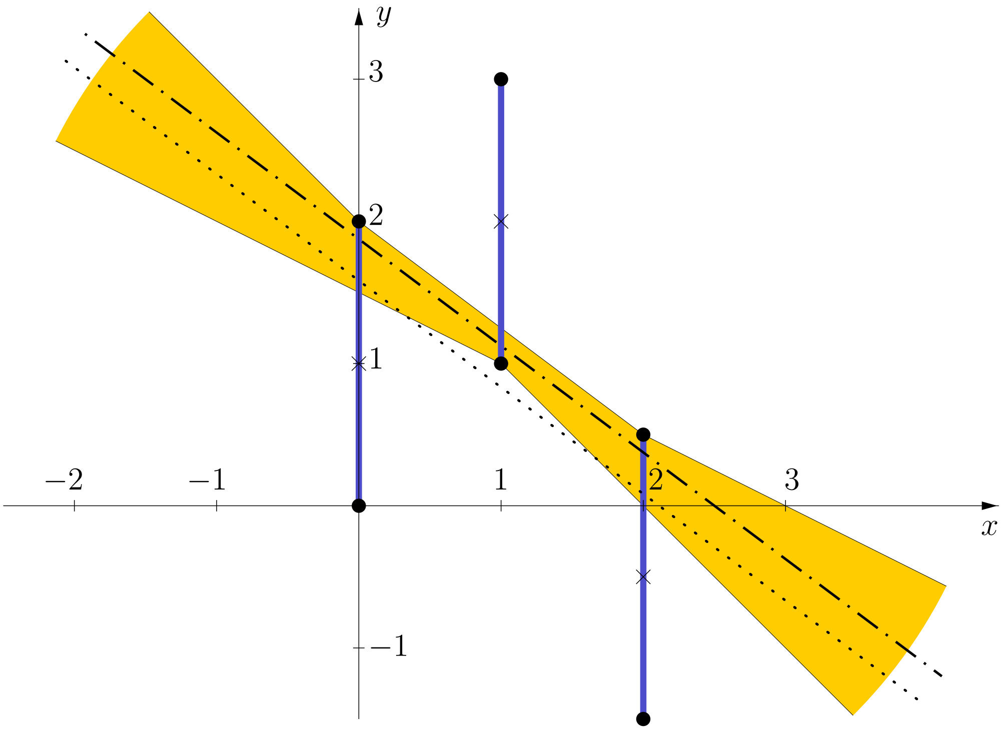

Рис. 5.6: В пространстве переменных x и y прямая $y = \beta_0^\star + \beta_1^\star x$, определяемая с помощью МНК (пунктир), не лежит в коридоре совместных прямых, проходящих через интервалы измерений

Обозначим через $\beta_0^\star$ и $\beta_1^\star$ оценки по МНК для β_0 и β_1. Известно (см. [65, 66]), что величины $\beta_0^\star$ и $\beta_1^\star$ определяются как решения нормальной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

которая получается из средней системы уравнений для (5.7) домножением обеих частей слева на транспонированную матрицу коэффициентов. После преобразования (5.8) получаем

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 6, \text{ обратная матрица} — \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

так что искомая оценка

$$\begin{pmatrix}\beta_0^\star\\ \beta_1^\star\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.5\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}9.5\\ -4.5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19/12\\ -3/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.58(3)\\ -0.75\end{pmatrix}.$$

Угловой коэффициент построенной прямой совпадает в тем, что получен выше с помощью метода максимума согласования. Но точка с координатами $(\beta_1^\star, \beta_0^\star)$, показанная на Рис. 5.5 звёздочкой, лежит на заметном удалении от информационного множества задачи. Сравнение зависимости, построенной с помощью МНК, с коридором линейных зависимостей, которые совместны с интервальными данными, представлено на Рис. 5.6 в координатах (x, y). Из него мы можем видеть, что МНК-линия не проходит через этот коридор в окрестности $x = 1$. ■

В общем случае, когда входные (экзогенные, предикторные) переменные известны неточно, ситуация существенно усложняется и множество параметров, совместных (согласующихся) с интервальными данными не может быть описано так же просто, с помощью системы линейных неравенств (5.5). Трудоёмкость распознавания его пустоты или непустоты также становится экспоненциальной в зависимости от количества переменных (см. подробности в [38]).

Общий случай задачи восстановления зависимостей. Рассмотрим теперь случай, когда неопределённость присутствует как в измерениях значений зависимой переменной, так и в измерениях значений аргументов (Рис. 5.1).

Пример 5.2. Пример из практики с существенно неточным измерением входных переменных, когда они должны устанавливаться в течение значительного времени.

В лаборатории лазерной диагностики плазмы и взаимодействия плазмы с поверхностью ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН создана и эксплуатируется установка [73] для термовакуумных испытаний опытных образцов устройств для исследования плазмы токамаков. Одним из входных параметров испытаний является температура. Например, при исследованиях покрытий зеркал изучается зависимость

$$\delta = \delta(T, p),$$

где δ — толщина покрытия образца, T — температура отжига образца, p — другие параметры.

Для повышения надежности, температура образца измеряется двумя платиновыми датчиками типа Pt100. Датчики идентичны, но скорость установления температуры конкретного датчика зависит от набора физических свойств конструкционных материалов (теплопроводность, теплоёмкость, плотность, коэффициент отражения излучения и другие) и параметров проведения электрических измерений (рабочий ток, постоянная интегрирования).

Для проверки готовности установки к работе необходимо убедиться в совместности показаний датчиков. Для этого предварительно проводят достаточно долговременные измерения в достаточно стабильных условиях. На рисунке 5.7 приведены показания температуры двумя датчиками в течение суток. Разница показаний датчиков находится в пределах декларированной производителем погрешности датчиков, ± 0.35°C. Суточные колебания температуры отражают характер её вариации в конкретном лабораторном помещении, 25-29 °C.

Рабочая температура проведения исседований существенно выше и достигает нескольких сот °C. В результате некоторого различия теплофизических и электрических параметров у разных датчиков, температуры, фиксируемые датчиками, реально никогда не бывают одинаковыми в процессе установления теплового равновесия. Характерная тенденция

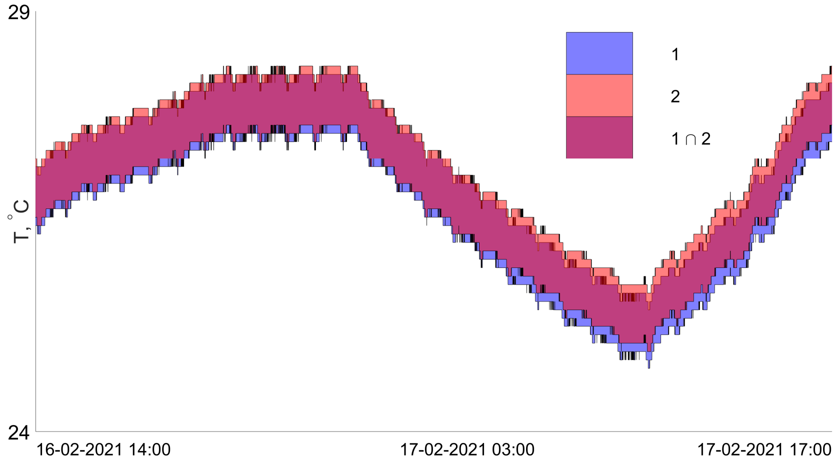

Рис. 5.7: Измерения температуры помещения двумя датчиками, обозначенными как 1 и 2, в течение суток. Разница показаний датчиков находится в пределах декларированной погрешности измерений. Данные датчиков совместны на всём протяжении измерений, множество $1 \cap 2$ непусто в течение всего эксперимента.

при этом такова: один из датчиков показывает более высокую скорость увеличения температуры при ее повышении, и более высокую скорость ее уменьшения в противоположной ситуации. Пример результатов измерений температуры в процессе работы приведен на рисунке 5.8.

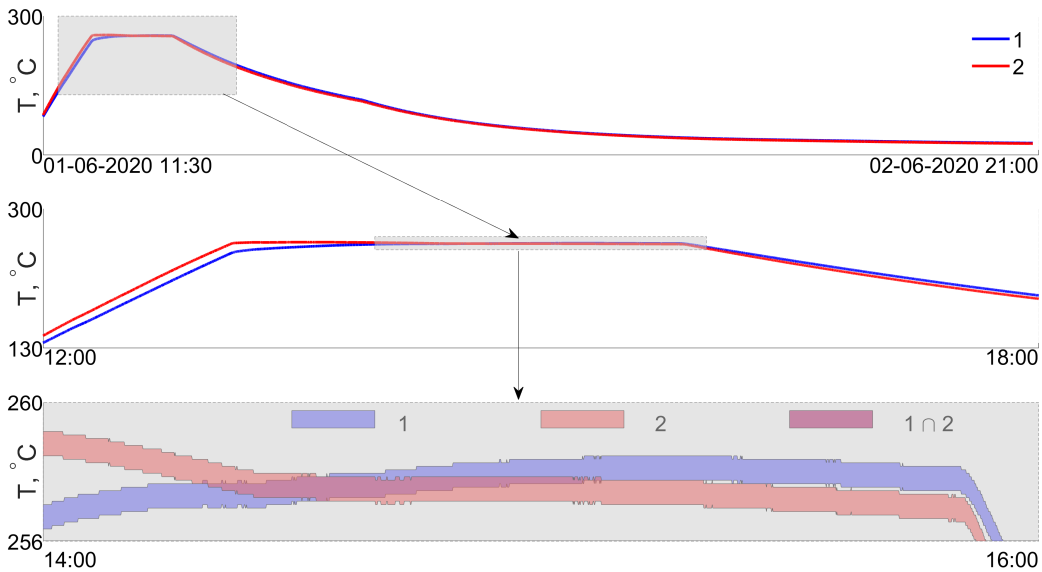

Рис. 5.8: Измерения температуры двумя датчиками. На верхнем рисунке представлены данные во всем интервале проведения эксперимента, всего около 2-х суток. Серой заливкой показан временной диапазон среднего графика. На среднем рисунке — данные в окрестности стационарного режима, серая заливка — временной диапазон нижнего графика. На нижнем рисунке — данные в течение 2-х часового интервала проведения испытаний. Совместность показаний дачиков, $1 \cap 2 \neq \varnothing$, при проведении испытаний имеет место около 1 часа.

Верхний рисунок показывает процесс изменения температуры в течение всего временного промежутка исследований. При выходе установки на температурный режим разница показаний датчиков составляет несколько десятков °C. По достижении участка технологических испытаний показания стабильны и отличаются на несколько °C. При снижении температуры численные значения показаний датчиков меняются местами: более «холодный» ранее датчик показывает более высокую температуру вплоть до окончательного приближения к комнатной.

На нижнем рисунке представлен интервал измерений после выхода на стационарный режим, с 14 до 16 час. В этот период показания датчиков близки. Заливкой цветом показаны области показаний датчиков, соответствующие паспортной погрешности измерений. На различных отрезках времени имеются примеры как совместных, так и несовместных показаний датчиков. ■

Если выборка измерений независимых переменных и зависимой переменной — накрывающая, то

$$\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_m x_{im} \in \boldsymbol{y}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где все x_{i1} могут принимать значения из соответствующих интервалов $\boldsymbol{x}_{i1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Как следствие, получаем интервальную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \beta_0 & + & \boldsymbol{x}_{11}\beta_1 & + & \boldsymbol{x}_{12}\beta_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{x}_{1m}\beta_m & = & \boldsymbol{y}_1, \\ \beta_0 & + & \boldsymbol{x}_{21}\beta_1 & + & \boldsymbol{x}_{22}\beta_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{x}_{2m}\beta_m & = & \boldsymbol{y}_2, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_0 & + & \boldsymbol{x}_{n1}\beta_1 & + & \boldsymbol{x}_{n2}\beta_2 & + & \ldots & + & \boldsymbol{x}_{nm}\beta_m & = & \boldsymbol{y}_n. \end{array} \right. \tag{5.9}$$

Это формальная запись, означающая совокупность обычных (точечных) систем линейных алгебраических уравнений того же размера и с теми же неизвестными переменными, у которых коэффициенты и правые части лежат в предписанных им интервалах (см. [38]). Восстановление параметров линейной зависимости можно рассматривать как решение выписанной интервальной системы уравнений.

В случае присутствия погрешностей как в измерениях аргумента, так и в измерениях зависимости множество параметров зависимостей, совместных (согласующихся) с данными, характеризуются уже новыми свойствами (Рис. 5.9). Прежде всего, отметим, что само понятие согласования параметров и данных должно быть расширено и переосмыслено.

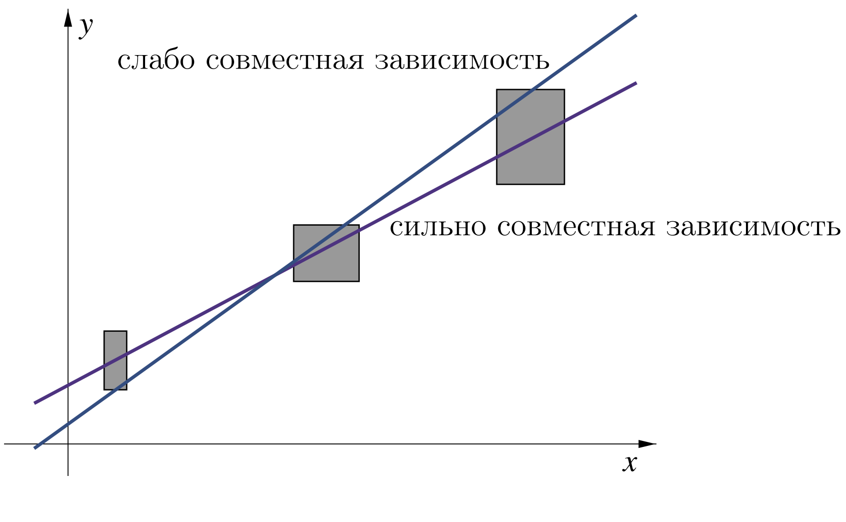

Рис. 5.9: Линейные зависимости с разными типами согласования с данными

Функциональная зависимость называется *слабо совместной* с интервальными данными, если её график проходит через каждый брус неопределённости измерений хотя бы для одного значения аргумента. Для случая линейной зависимости

$$(\exists x_{i1} \in \boldsymbol{x}_{i1}) \cdots (\exists x_{im} \in \boldsymbol{x}_{im})$$
$$\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_m x_{im} \in \boldsymbol{y}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Функциональная зависимость называется *сильно совместной* с интервальными данными, если её график проходит через каждый брус неопределённости измерений для любого значения аргумента из интервалов неопределённости входных переменных.

$$(\forall x_{i1} \in \boldsymbol{x}_{i1}) \cdots (\forall x_{im} \in \boldsymbol{x}_{im})$$
$$\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_m x_{im} \in \boldsymbol{y}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

К настоящему моменту предложено несколько методов восстановления линейных зависимостей по интервальным данным, каждый из которых отталкивается от одной общей идеи, но далее обработку данных проводит по-своему. Это метод центра неопределённости [44, 45, 46], метод максимума согласования [62, 63, 71, 72], “метод простого интервального оценивания” [47], метод польского физика М. Гутовски [48] (“нарезка” информационного множества), метод парциальных информационных множеств [49, 50] и др. Перечисленные методы ориентированы на разные задачи, используют разные предположения об обрабатываемых данных. Иногда они дают одинаковые результаты, иногда — разные.

Приближение и оценивание информационного множества. Если в функциональной зависимости (5.2) количество переменных $m \geq 1$, то информационное множество является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ размерности два и более. В этом случае информационное множество может иметь довольно сложную форму, которая не обязательно совпадает с многомерными интервалами-брусами.

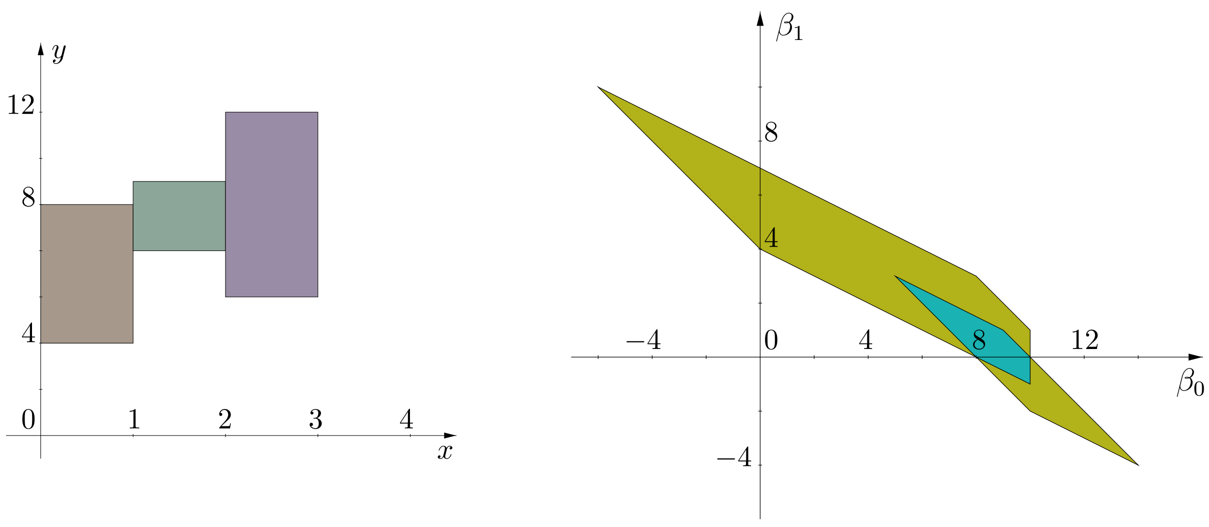

Рис. 5.10: Наглядное представление интервальных данных, соответствующих интервальной линейной системе (5.10), и её множества решений.

Пример 5.3. На Рис. 5.10 показано объединённое множество решений интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & [0,1] \\ 1 & [1,2] \\ 1 & [2,3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [4,10] \\ [8,11] \\ [6,14] \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Она соответствует задаче восстановления линейной зависимости вида (5.2) по данным измерений, которые изображены на Рис. 5.10.

Это множество решений является невыпуклым многоугольником с восемью вершинами,

$$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}14\\-4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix}$$

которые перечислены по направлению обхода против часовой стрелки.[1] Оно простирается в три квадранта (из четырёх) пространства $\mathbb{R}^2$.

Допусковое множество решений интервальной линейной системы (5.10) — это маленький пятиугольник внутри большого многоугольника объединённого множества решений. Его вершинами являются точки

$$\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}10\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix},$$

которые перечислены также против часовой стрелки. ■

Система (5.10) сходна по виду с системой (5.9), а интервалы коэффициентов при неизвестных переменных β_i и интервальные правые части намеренно взяты неотрицательными, чтобы придать этому примеру реалистичность. Но можно показать (см. подробности в [38]), что и в самом общем случае множества решений интервальных линейных систем выглядят похожим образом. Они являются объединениями нескольких выпуклых многогранных (полиэдральных) множеств, число которых может быстро расти с увеличением количества неизвестных параметров. Если матрица системы (5.9) уравнений — точечная, т. е. коэффициенты при неизвестных β_i являются обычными вещественными числами, то объединённое множество решений в целом является выпуклым. Но в общем случае, когда матрица интервальной системы линейных алгебраических уравнений существенно интервальна, то объединённое множество решений может быть невыпуклым. Допусковое множество решений всегда выпукло, но количество ограничивающих его гиперплоскостей может быть очень большим.

В этих условиях точное и полное описание информационного множества является, как правило, сложным и малополезным. Имеет смысл найти какое-нибудь приближённое описание информационного множества, которое удовлетворит заказчика. Здесь могут встретиться различные ситуации.

Часто бывает необходимо оценить разброс точек из информационного множества, то есть определить, насколько сильно оно "растекается" в пространстве параметров. Как правило, это делается для его отдельных компонент, так что в целом нам требуется интервальный брус наименьших размеров, содержащий множество решений.

Во многих задачах требуется внутреннее оценивание множества решений. Тогда мы находим какое-то несложно описываемое подмножество из информационного множества, например, вписанный брус.

Помимо оценивания информационного множества "целиком", во многих ситуациях достаточно найти какую-либо точку из него (здесь мы имеем аналогию с оцениванием "точечным" и "интервальным" в традиционной статистике). Естественно выбирать такую одну точку удовлетворяющей некоторым условиям оптимальности

Частый выбор — взять центр интервального бруса, который является минимальной по включению внешней оценкой информационного множества.

---

[1] Рис. 5.10 многоугольники множеств решений и их вершины построены с помощью свободно распространяемого пакета `IntLinIncR2` [64].

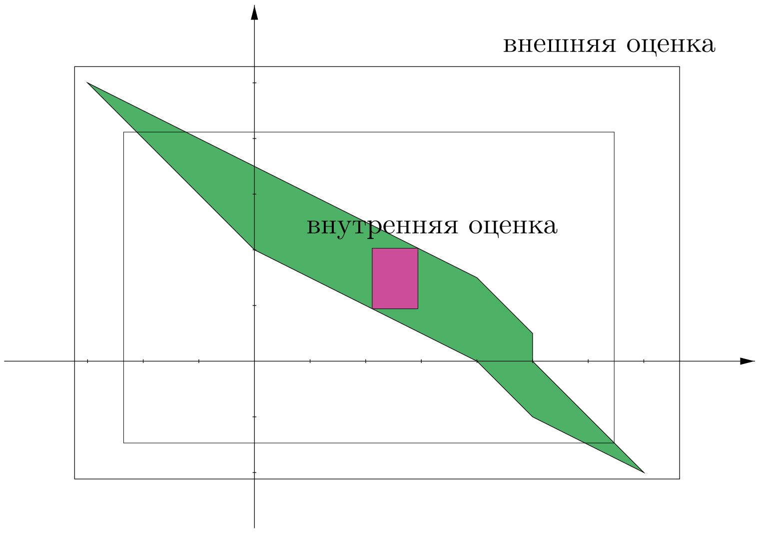

Рис. 5.11: Различные способы оценивания информационного множества.

Другие возможные варианты — это так называемый центр Оскорбина [44], чебышёвский центр информационного множества [16, 77], центр тяжести информационного множества [16], точка максимума согласования (аргумент максимума распознающего функционала, который является точкой максимума согласования данных, т. е. максимума совместности соответствующей интервальной системы уравнений (5.9), см. [62, 63, 71, 72]).

Парадоксы интервальной статистики. Восстановление зависимостей по данным, имеющим интервальную неопределённость, обладает парадоксальными свойствами, отмеченными Е.З. Демиденко в заметке [67] и А.И. Хлебниковым в статьях [68, 69].[2]

Суть парадокса Е.З. Демиденко может быть кратко выражена фразами "Чем грубее — тем лучше" или "Чем точнее — тем хуже". В самом деле, присутствие неопределённости в данных является нежелательным феноменом, который искажает истинную картину реальности. Уменьшение этой неопределённости, т. е. сужение интервалов в данных, является благом, которое на практике должно приветствоваться. С другой стороны, при более широких интервалах исходных данных информационное множество множество задачи — множество решений интервальной системы уравнений, построенное по данным измерений, как правило, также является более широким, и потому появляется больше возможностей для выбора из него параметров модели, чем в случае узких интервальных данных, когда информационное множество может стать вообще пустым. Итак, чем выше точность исходных данных, чем меньше их интервальная неопределённость, тем хуже для оценивания параметров. И наоборот, чем шире интервальные неопределённости, чем меньше знаем о точных значениях измеряемых величин, тем лучше для процесса оценивания параметров и тем более богатый набор результатов можно получить.

Эта ситуация наглядно изображена на Рис. 5.12, где интервалы неопределённостей правого чертежа получаются сужением интервалов правого чертежа, но при этом теряется возможность проведения прямой, проходящей через все брусы неопределённости, т. е. согласованной со всеми данными.

А.И. Хлебниковым в работах [68, 69] отмечено несколько противоречивых свойств "наивной" обработки интервальных данных и, фактически, сформулирован ещё один инте-

[2] Напомним, что и вероятностная статистика также обладает своими парадоксами, см. книгу Г. Секея [70] и статьи В. Амрхайна.

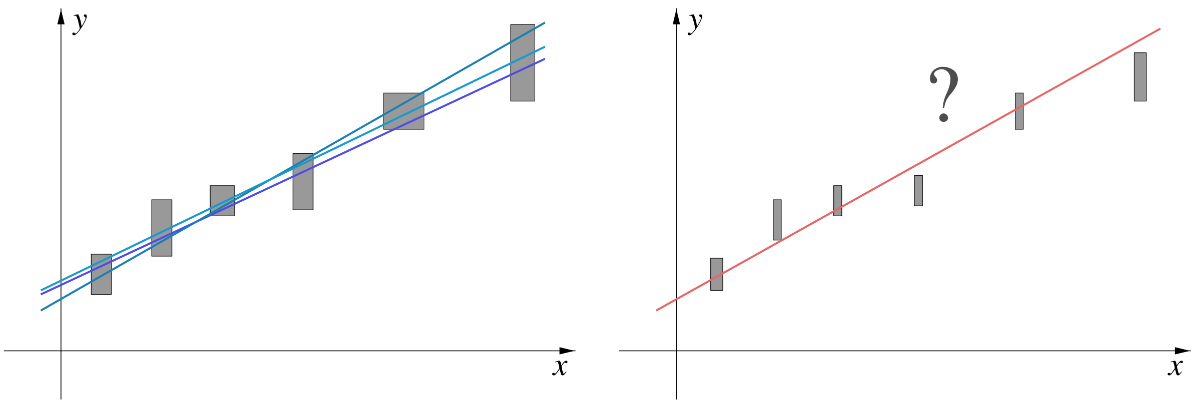

Рис. 5.12: Широкие брусы неопределённости измерений позволяют строить много моделей, совместных с интервальными данными. Для узких брусов неопределённости измерений модель, которая совместна с этими данными, может не существовать.

ресный парадокс: чем больше интервальных измерений, тех хуже для выбора параметров модели.[3]

Парадокс А.И. Хлебникова относится к тем подходам к обработке интервальных данных, в которых оценка параметров берётся из информационного множества задачи, а оно, в свою очередь, является множеством решений системы уравнений или неравенств, каждое из которых соответствует отдельному измерению. Тогда добавление в систему дополнительных уравнений или неравенств приводит к тому, что множество решений может только уменьшаться или даже стать пустым, пересекаясь с множествами решений других уравнений и неравенств. С другой стороны, здравый смысл подсказывает, что увеличение количества измерений не должно влиять на трудность получения оценки, её доступность и т. п. Каждое измерение приносит дополнительную информацию об объекте, и разумные процедуры обработки данных должны быть, по крайней мере, не слишком чувствительны к их количеству.

Для преодоления отмеченных парадоксов требуется более тонкий анализ задачи восстановления зависимостей и сути интервальной неопределённости в данных. Отметим, прежде всего, что при обработке интервальных данных возможны две принципиально различные ситуации.

Первая из них реализуется в случае, когда интервалы в данных адекватно представляют границы погрешностей измерений (т. е. выборка накрывающая). Тогда уменьшение ширины интервалов данных, уменьшение неопределённости является позитивным фактом. При этом невозможность выбора каких-либо параметров модели, согласующихся с этими интервальными данными (когда множество решений интервальной системы пусто), является признаком неадекватности самой модели, которая выбрана для описания объекта. Как следствие, модель должна быть сменена, а процесс оценивания параметров повторён заново с другой моделью.

Во второй ситуации предполагается, что интервалы неопределённости данных могут не вполне достоверно отражать множества возможных значений соответствующих величин (т. е. выборка ненакрывающая), так что, в принципе, для выбранной модели объекта

[3]Критика А.И. Хлебникова была направлена против той версии метода центра неопределённости, которая изложена в книге Белов В.М., Суханов В.А., Унгер Ф.Г. “Теоретические и прикладные аспекты метода центра неопределенности”. Новосибирск: Наука, 1995.

можно и не получать полного согласования с ней экспериментальных данных. Допустима некоторая несогласованность (как и в традиционном случае точечных данных с зашумлением), и решается задача — тем или иным способом минимизировать это несогласование.

Другой причина, в которой вынуждены идти по этому пути, связана с необходимостью сохранения избранной модели, вида функциональной зависимости между рассматриваемыми величинами, относительно которой дано или a priori известно, что "так должно быть".

На этом втором пути необходимо выбрать количественную "меру несогласования" данных с параметрами объекта, и тогда искомой оценкой можно будет, к примеру, взять ту точку пространства параметров, в которой эта несогласованность минимальна.

Важный методический вывод, который вытекает из анализа парадоксов Е.З. Демиденко и А.И. Хлебникова, заключается в том, что они являются прямым следствием определённых специфических свойств информационного множества задачи восстановления зависимостей, т. е. множеств решений интервальных системы уравнений или неравенств. Поэтому наши оценки параметров восстанавливаемой зависимости нельзя основывать только лишь на существовании непустого информационного множества и брать их только из этого множества, если хотим избежать их парадоксальности. Разумные и непарадоксальные процедуры оценивания в условиях интервальной неопределённости должны включать в себя, в качестве органичной составной части, обработку случая пустого информационного множества.

Последнее заключение, как нетрудно понять, находится в согласии с "принципом соответствия" отмеченным в конце раздела 3: методы обработки интервальных данных должны превращаться в разумные методы для точечных данных, если интервальная неопределённость исчезает и, как следствие, информационное множество становится пустым. Для задач с точечными данными информационное множество, как правило, всегда пусто. Его непустота является исключительной ситуацией, которая обычно разрушается при любом сколь угодно малом возмущении в данных.

В целом, мы приходим к ситуации, когда оценки параметров, полученные по данным с интервальной неопределённостью, получают дополнительную качественную характеристику:

- либо оценка соответствует непустому информационному множеству задачи и, как следствие, берётся из него,

- либо оценка параметров берётся не из информационного множества задачи, которое является пустым.

Аналогов этому в традиционной статистике нет. Но новая характеристика оценки, связанная с пустотой/непустотой информационного множества относится не только (и не столько) к оценке параметров, как таковой, а описывает свойства решённой задачи — её интервальные данные, вид модели, их взаимоотношение и т. п. Разумное использование этой информации даёт ценнейшие сведения о моделируемом объекте и обрабатываемых данных.

Из предложенных на сегодняшний день подходов к оценивания параметров зависимостей по интервальным данным модифицированный метод центра неопределённости [45] и метод максимума согласования [62, 71, 72] не опираются на непустоту информационного множества задачи (хотя и делают это по-разному). Напротив, в методе "простого интервального оценивания" [47], в методе М. Гутовски [48] и в методе парциальных информационных множеств [49, 50] оценка параметров зависимости всегда берётся из непустого информационного множества. Если же информационное множество пусто, то все эти методы рекомендуют коррекцию данных и, далее, повторное определение параметров зависимости с новыми данными.

Те же самые парадоксы, как нетрудно сообразить, относятся также к оцениванию физической константы и налагают те же самые требования на методы измерения константы.

Состоятельность оценки. В вероятностной математической статистике оценка называется *состоятельной*, если она сходится к значению оцениваемого параметра при неограниченном возрастании объёма выборки.

Понятие состоятельности играет важную роль в традиционной статистике и служит одним из критериев отбора "хороших" методов оценивания. Фактически, в понятии состоятельности имеется два аспекта, каждый из которых важен и сам по себе:

(I) приближённые оценки, уточняясь, в конце концов, дают истинное значение интересующей нас оцениваемой величины,

(II) уточнение приближённых оценок выполняется согласно известной из математического анализа конструкции предела (предельного перехода).

Следствием пункта (II) является, в частности, единственность предела и, как следствие, единственность значения интересующей нас величины, что очень привлекательно для практиков.

Но важно осознавать, что понятие состоятельности имеет содержательный смысл лишь для оценок, которые находятся "по ту сторону баррикады" совместности, т. е. для которых нет согласования с данными и когда информационное множество пусто. Если же согласование с данными имеет место и информационное множество непусто, то все точки из него полностью соответствуют модели объекта или явления и все являются "состоятельными" в смысле согласования с моделью. Тогда непонятно, зачем вообще нужна состоятельность в смысле вероятностной статистики и что она выражает. Если некая оценка согласуется с данными (лежит в непустом информационном множестве), то это является выражением её наивысшего статуса в рамках рассматриваемой модели, и лучшего уже не имеет смысла рассматривать.

По-видимому, именно это имел в виду Л.В. Канторович в своей пионерской статье [1], где писал: "Обычно полученную в результате измерений избыточную систему уравнений обрабатывают по методу наименьших квадратов Гаусса. При этом происходит значительная потеря информации". Потеря информации в данном случае — это отсечение возможных вариантов, которые тоже удовлетворяют модели и реально являются решениями задачи, в угоду методу решения, который такой неоднозначности не воспринимает.

"Состоятельность" оценок, получаемых при обработке интервальных данных, рассматривалась в некоторых работах. Например, в [54] обсуждается гипотетическая ситуация, в которой с ростом числа интервальных наблюдений множество решений стягивается в точку и в пределе мы получаем однозначную оценку. Получается красиво! Но здесь, как нам кажется, автор смешивает "состоятельность" и "однозначность". Предел всегда единствен, и потому состоятельная оценка тоже всегда одна. Приятно, конечно, когда в результате решения задачи получается всего одно значение, так что Лицо, Принимающее Решения не должно напрягать интеллект для дальнейшего выбора. Но не нужно путать это с тем свойством, что необходимую оценку мы получаем в пределе. При интервальном оценивании с точки зрения согласия с моделью все решения из непустого информационного множества — "состоятельные".

Мера вариабельности оценки. Термином "вариабельность" мы называем степень изменчивости и неоднозначности оценки, и необходимость ее введения диктуется тем обстоятельством, что в задачах обработки интервальных данных ответ, как правило, неединствен. Обычно мы получаем целое множество различных оценок, одинаково пригодных в качестве ответов к задаче и согласующихся с её данными. То, насколько мало́ или обширно это множество, как раз-таки и характеризуется термином "вариабельность".

Термин "чувствительность оценки" относится к ситуациям, когда находится одна оценка параметров (это так называемые задачи точечного оценивания), и нам необходимо определить, насколько сильно она будет меняться при вариациях (изменениях) входных данных задачи.

В традиционной теоретико-вероятностной статистике оценки тех или иных параметров, как известно, сами являются случайными величинами, а мерой их чувствительности и вариабельности может служить дисперсия оценки (см., к примеру, [4]). Кроме того, используются также средняя абсолютная разность, медианное абсолютное отклонение, среднее абсолютное отклонение и др. Они выражает как меру рассеяния значений оценки, так и меру чувствительности этой оценки к изменениям входных данных задачи.

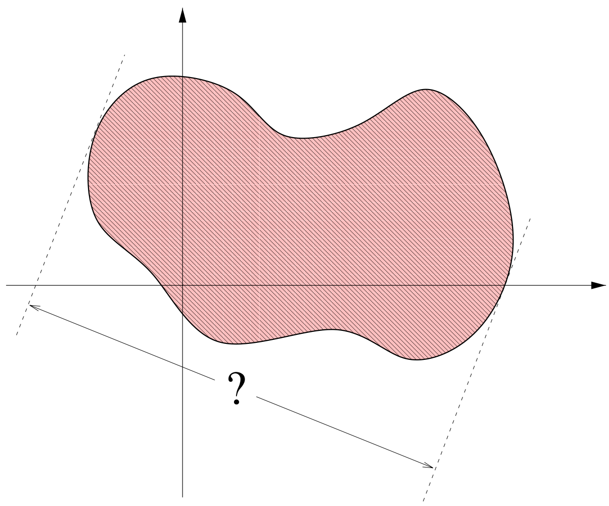

Рис. 5.13: Мерой вариабельности может служить размер информационного множества задачи

Что может служить аналогом этой величины в статистике интервальных данных, которая не оперирует вероятностными понятиями и в которой данные не несут вероятностных распределений?

В отношении вариабельности оценки параметров ответ на этот вопрос кажется достаточно очевидным: ею может стать любая величина, характеризующая размеры информационного множества задачи, если оно непусто (Рис. 5.13). Можно даже просто брать интервальные оценки информационного множества, получаемые теми или иными методами интервального анализа. Определенный недостаток этого варианта (хорошо заметный в сравнении с дисперсией) — излишняя детализация ответа, выдаваемого в виде бруса в $\mathbb{R}^n$ или интервального вектора какого-нибудь другого вида, большое количество информации, которую еще необходимо "переварить" и привести к компактной и выразительной форме. Другой недостаток — относительная сложность нахождения такой оценки.

Требуется относительно несложная и эффективно вычислимая величина, выражаемая одним числом, которая давала бы общее агрегированное представление об интересующем нас предмете. Аналогично дисперсии она может служить "прикидочной" характеристикой качества оценок при практическом решении различных задач обработки интервальных данных. Конкретная форма этой величины, конечно, должна зависеть как от задачи, так и от метода ее решения.

Здесь в интервальной статистике сделано относительно мало.

Благодарности. Авторы искренне благодарны Ларисе Аркадьевне Игнатенковой, руководителю Центра “СЕРТИМЕТ” УрО РАН, за ценную информацию, консультации и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] **Канторович Л.В.** О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский Математический Журнал. 1962. Т. 3. №5. С. 701–709.

[2] Статистика. Математическая энциклопедия, том 5, Москва: Советская Энциклопедия, 1985. – С. 169.

[3] Статистика // Малая советская энциклопедия. – М.: Советская Энциклопедия, 1960. – Т. 8. – С. 1090.

[4] **Крамер Г.** Математические методы статистики. Москва: Мир, 1975.

[5] **Тутубалин В.Н.** Теория вероятностей: Краткий курс и научно-методические замечания. Москва: Изд-во МГУ, 1972.

[6] **Алимов Ю.И.** Альтернатива методу математической статистики. Москва: Знание, 1980.

[7] **Тутубалин В.Н.** Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности). Москва: Знание, 1977.

[8] **Алимов Ю.И., Кравцов Ю.А.** Является ли вероятность “нормальной” физической величиной? // Успехи физических наук. 1992. Т. 162, №7. С. 149–182.

[9] **Тутубалин В.Н.** Вероятность, компьютеры и обработка результатов эксперимента // Успехи физических наук. 1993. Т. 163, №7. С. 93-109.

[10] **Горбань И.И.** Феномен статистической устойчивости. Киев: Наукова думка, 2014.

[11] **Горбань И.И.** Статистическая устойчивость — математическая закономерность или физический феномен? // Математичнi машини i системи. 2017. №3. С. 102–110.

[12] ГОСТ Р 8.736-2011 Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения. – М.: Стандартинформ, 2019.

[13] МИ 2083-90 Рекомендация. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. Издание официальное. — М.: Издательство стандартов, 1991.

[14] **Новицкий П.В., Зограф И.А.** Оценка погрешностей результатов измерений. Ленинград: “Энергоатомиздат”, 1991.

[15] **H.T. Nguyen, V. Kreinovich, B. Wu, G. Xiang**, Computing Statistics under Interval and Fuzzy Uncertainty. Applications to Computer Science and Engineering. Springer, Berlin-Heidelberg, 2012.

[16] **Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.** Оптимизация в условиях неопределенности. Москва: Изд-во МЭИ; София: Техника, 1989. – 224 с.

[17] **Вощинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р.** Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке // Заводская лаборатория. 1990. Т. 56, №7. С. 76–81.

[18] **Вощинин А.П.** Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. 2002. Т. 68, №1. С. 118–126.

[19] **Вощинин А.П.** Задачи анализа с неопределёнными данными — интервальность и/или случайность? // Труды Международной конференции по вычислительной математике. Рабочие совещания. Редакторы Ю.И. Шокин, А.М. Федотов, С.П. Ковалев, Ю.И. Молородов, А.Л. Семенов, С.П. Шарый. Совещание "Интервальная математика и методы распространения ограничений" ИМРО-2004. – Издательство ИВМиМГ СО РАН: Новосибирск, 2004. – С. 147–58. Электронная версия доступна на `http://www.nsc.ru/interval/Conferences/IMRO_04/Voschinin.pdf`

[20] **Орлов А.И.** Часто ли распределение результатов наблюдений является нормальным? // Заводская лаборатория. 1991. Т. 57. №7. С. 64–66.

[21] **Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н.** О решении задач статистического анализа интервальных наблюдений // Вычислительные Технологии. 1997. Т. 2. №1. С. 28–36.

[22] **Орлов А.И., Луценко Е.В.** Системная нечёткая интервальная математика. – Краснодар: Издательство КубГАУ, 2014. – 600 с.

[23] **Орлов А.И.** Статистика интервальных данных (обобщающая статья) // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81. №3. С. 61–69.

[24] **Billard, L., Diday, E.** Symbolic data analysis: conceptual statistics and data mining. Chichester: John Wiley & Sons, 2006.

[25] **Клини С.К.** Математическая логика. Москва: Мир, 1973.

[26] **Белоусов А.И., Ткачев С.Б.** Дискретная математика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 744 с.

[27] **Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е.** Вводный курс математической логики. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 128 с.

[28] VIM3 Международный словарь по метрологии: основные и общие понятия и соответствующие термины: пер. с англ. и фр. / Всерос. науч.-исслед. ин-т метрологии им. Д.И. Менделеева, Белорус. гос. ин-т метрологии. Изд. 2-е, испр. — СПб.: НПО "Профессионал", 2010. — 82 с.

[29] International Vocabulary of Metrology — Basic and General Concepts and Associated Terms (VIM 3rd edition). JCGM 200:2012. Электронная версия доступна на `https://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html`

[30] РМГ 29–2013 Рекомендации по межгосударственной стандартизации. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения. Издание официальное. – М.: Стандартинформ, 2014.

[31] **Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.** Элементы прикладной математики. 3-е изд. М.: Наука, 1972. 592 с.

[32] **Тудоровский А.И.** Теория оптических приборов. Изд. 2-е, перераб. и доп. В 2-х ч. М.-Л.: 1. Общая часть. 1948, 662 с.

[33] **Гантмахер Ф.Р.** Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002.

[34] ГОСТ 34100.3–2017/ISO/IEC Guide 98-3:2008. неопределённость измерения . Часть 3. Руководство по выражению неопределённости измерения (ISO/IEC Guide 98-3:2008, IOT). Межгосударственный стандарт. М.: Стандартинформ, 2017.

[35] ГОСТ 34100.3.2-2017/ISO/IEC Guide 98-3:2008. неопределённость измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределённости измерения. Дополнение 2. Обобщение на случай произвольного числа выходных величин (ISO/IEC Guide 98-3:2008, IOT). Идентичен Guide 98-3/Suppl 2:2011. Межгосударственный стандарт. Издание официальное. – М.: Стандартинформ, 2017.

[36] Р 50.2.028-2003 ГСИ. Алгоритмы построения градуировочных характеристик средств измерений состава веществ и материалов и оценивание их погрешностей (неопределённостей). Оценивание погрешности (неопределённости) линейных градуировочных характеристик при использовании метода наименьших квадратов. Издание официальное. — М.: Издательство стандартов, 2003.

[37] **Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э.** Прикладной интервальный анализ. Москва; Ижевск: Изд-во "РХД", 2007. 467 с.

[38] **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ. ФИЦ ИВТ: Новосибирск, 2020. Электронная книга, доступная на `http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf`

[39] **Milanese, M., Norton, J., Piet-Lahanier, H., Walter, E. (Eds.)** Bounding Approaches to System Identification, Plenum Press, New York, 1996. DOI: 10.1007/978-1-4757-9545-5

[40] **Moore, R.E., Kearfott, R.B., Cloud, M.J.** Introduction to Interval Analysis. SIAM, Philadelphia, 2009.

[41] **Kearfott, R.B., Nakao, M., Neumaier, A., Rump, S., Shary, S.P., van Hentenryck, P.** Standardized notation in interval analysis // Вычислительные Технологии. 2010. Т. 15, №1. С. 7–13.

[42] **Крылов А.Н.** Лекции о приближённых вычислениях. – Москва: ГИТТЛ, 1954.

[43] **Оскорбин Н.М.** Некоторые задачи обработки информации в управляемых системах // Синтез и проектирование многоуровневых иерархических систем. Материалы конференции. – Барнаул: Алтайский государственный университет, 1983.

[44] **Оскорбин Н.М., Максимов А.В., Жилин С.И.** Построение и анализ эмпирических зависимостей методом центра неопределенности // Известия Алтайского государственного университета. 1998. №1. С. 35–38.

[45] **Жилин С.И.** Нестатистические методы и модели построения и анализа зависимостей. – Барнаул, 2004. – Диссертация на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук по специальности 05.13.01 “системный анализ, управление и обработка информации”. Доступна на `http://www.nsc.ru/interval/Library/ApplDiss/Zhilin.pdf`

[46] **Zhilin, S.I.** On fitting empirical data under interval error // Reliable Computing. 2005. Vol. 11. P. 433–442. DOI: 10.1007/s11155-005-0050-3

[47] **Родионова О.Е.** Интервальный подход к анализу больших массивов физико-химических данных. – Диссертация … доктора физико-математических наук. – Институт физической химии им. Н.Н.Семёнова РАН: Москва, 2007.

[48] **Gutowski, M.W.** Interval experimental data fitting // *Focus on Numerical Analysis*, ed. by J.P. Liu. New York, Nova Science Publishers, 2006. P. 27–70.

[49] **Кумков С.И.** Обработка экспериментальных данных ионной проводимости расплавленного электролита методами интервального анализа // Расплавы. 2010. №3. С. 79–89.

[50] **Kumkov, S.I., Mikushina, Yu. V.** Interval approach to identification of catalytic process parameters // Reliable Computing. 2013. Vol. 19. P. 197–214.

[51] **Козлов Ю.В., Мартемьянов В.П., Мухин К.Н.** Проблема массы нейтрино в современной нейтринной физике // Успехи Физических Наук. 1997. Т. 167. С. 849–885. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199708c.0849

[52] **Ельяшевич М.А.** Развитие Нильсом Бором квантовой теории атома и принципа соответствия // Успехи Физических Наук. 1985. Т. 147, вып. 2. С. 253–301. DOI: 10.3367/UFNr.0147.198510c.0253

[53] **Кедров Б.М. и др.** Принцип соответствия. Историко-методологический анализ. Москва: Наука, 1979.

[54] **Куржанский А.Б.** Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и Телемеханика. 1991. №1. С. 3–26.

[55] **Meija, J., Coplen, T.B., Berglund, M., Brand, W.A., De Bièvre, P., Gröning, M., Holden, N.E., Irrgeher, J., Loss, R.D., Walczyk, T., Prohaska, T.** Atomic weights of the elements 2013 (IUPAC Technical Report) // Pure and Applied Chemistry. 2016. Vol. 88, Issue 3. P. 265–291. DOI: 10.1515/pac-2015-0305

[56] Standard atomic weights of 14 chemical elements revised // Chemistry International. 2018. Vol. 40, Issue 4. P. 23–24. DOI: 10.1515/ci-2018-0409

[57] **Rosi, G, Sorrentino, F., Cacciapuoti, L., Prevedelli, M., Tino, G.M.** Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms // Nature. 2014. Vol. 510, P. 518–521. DOI: 10.1038/nature13433
Предварительная версия работы депонирована в репозитории arXiv.org, статья `https://arxiv.org/pdf/1412.7954.pdf`

[58] **Qing Li, Chao Xue, Jian-Ping Liu, et al.** Measurements of the gravitational constant using two independent methods // Nature. 2018. Vol. 560. P. 582–588. DOI: 10.1038/s41586-018-0431-5

[59] **Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.** Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Москва: URSS, 2010, 2016. 224 с.

[60] **Обэн Ж.-П., Экланд И.** Прикладной нелинейный анализ. Москва: Мир, 1988.

[61] **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования: в 2-х т. Москва: Мир, 1991.

[62] **Шарый С.П.** Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределённостями // Автоматика и Телемеханика. 2012. №2 С. 111–125.

[63] **Шарый С.П., Шарая И.А.** Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // Вычислительные Технологии. 2013. Т. 18. №3. С. 80–109.

[64] **Шарая И.А.** Пакет IntLinIncR2 для визуализации множеств решений интервальных линейных систем с тремя неизвестными. – Программное обеспечение, доступное на `http://www.nsc.ru/interval/sharaya/`

[65] **Линник Ю.В.** Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. 2-е изд. М.: ГИФМЛ, 1962.

[66] **Дрейпер Н., Смит Г.** Прикладной регрессионный анализ. Москва: Вильямс, 2016.

[67] **Демиденко Е.З.** Комментарий II к статье А.П. Вощинина, А.Ф. Бочкова и Г.Р. Сотирова "Метод анализа данных при интервальной нестатистической ошибке" // Заводская лаборатория. 1990. Т. 56, № 7. С. 83–84.

[68] **Хлебников А.И.** О методе центра неопределённости // Журнал аналитической химии. 1996. Т. 51, №3. С. 347–348.

[69] **Хлебников А.И.** О проблемах использования метода центра неопределенности для обработки экспериментальных данных // Вычислительные технологии. 1999. Т. 4. №4. С. 80–81.

[70] **Секей Г.** Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. Москва: Мир, 1990.

[71] **Шарый С.П.** Метод максимума согласования для восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределённостью // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. 2017. №6. С. 3–19.

[72] **Шарый С.П.** Задача восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределённостью // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2020. Т. 86, №1. С. 62–74. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-1-62-74

[73] **Баженов А.Н., Коваль А.Н., Толстяков С.Ю., Мухин Е.Е., Дмитриев А.М., Самсонов Д.С.** Стенд для термовакуумных механических испытаний // Приборы и техника эксперимента. 2021. Вып. 1. С. 151–152.

[74] **Amrhein, V., Greenland, S., McShane D.** Scientists rise up against statistical significance // Nature. 2019. Vol. 567. P. 305–307.
https://www.nature.com/articles/d41586-019-00857-9

[75] **Wasserstein, R.L., Schirm, A.L., Lazar, N.A.** Moving to a world beyond “$p < 0.05$” // The American Statistician. 2019. Vol. 73. P. 1–19. DOI: 10.1080/00031305.2019.1583913

[76] Примеры анализа интервальных данных в Octave
https://github.com/szhilin/octave-interval-examples

[77] **Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.** Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967.